INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

CLASA A XI-A

1. Se consideră sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+z=2^{a} \\ x+y+2z=4^{a} \end{cases}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

   a) Să se calculeze determinantul sistemului.
   b) Să se determine soluția $(x(a), y(a), z(a))$ a sistemului de ecuații.
   c) Să se determine mulțimea $A = \{a \in \mathbf{R} | y(a) > 1\}$.

2. Se consideră funcția $f: [0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{\alpha} - \alpha x$, unde $\alpha \in (0,1)$.
   a) Să se precizeze intervalele de monotonie pentru funcția f.
   b) Să se deducă inegalitatea: $x^{\alpha} \leq \alpha x - \alpha + 1$, $\forall x \in (0,+\infty)$.
   c) Să se arate că $a^{\alpha} b^{\beta} \leq \alpha a + \beta b$, $\forall a, b > 0$ și $\forall \alpha, \beta > 0$ cu $\alpha + \beta = 1$.

3. Fie parabola de ecuație $y = 4x^2 - 1$ și dreapta (d), tangentă la parabolă în punctul de abscisă $x = \frac{1}{8}$.
   a) Să se determine unghiul pe care îl face dreapta (d) cu axa (Ox).
   b) Să se determine aria triunghiului determinat de dreapta (d) cu axele de coordonate.

4. Fie matricea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 \\ a_4 & 0 & a_5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}).$$

   Andrei și Bogdan joacă următorul joc: Andrei dă o valoare lui a_1, apoi Bogdan dă o valoare lui a_2, după aceasta, Andrei dă o valoare lui a_3 și apoi Bogdan dă o valoare lui a_4. În final, Andrei dă o valoare lui a_5. Andrei câștigă numai dacă $\det(M^2) = 1$.
   Să se determine tripletele (a_1, a_3, a_5) care asigură victoria lui Andrei, oricare ar fi alegerile făcute de Bogdan.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7*