INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

# CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

## ETAPA NAŢIONALĂ
## 13 aprilie 2014

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Profil Filologie / Ştiinţe sociale**

**1.** Fie binomul $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, cu suma coeficienţilor binomiali egală cu 256. Să se determine:

d) Termenul dezvoltării care nu îl conţine pe $x$.
e) Termenul din mijloc al dezvoltării.
f) Termenul dezvoltării care îl conţine pe $x^2$.

| | | |
|---|---|---|
| | *Soluţie*<br>$C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n \Rightarrow 2^n=2^8 \Rightarrow n=8$ | 2p |
| a) | $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$ (formula termenului de rang k+1)<br>$T_{k+1}=C_8^k \sqrt{x}^{8-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_8^k x^0$; $\sqrt{x}^{8-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=x^0$ | 1p |
| | $x^{\frac{8-k}{2}}\cdot x^{-\frac{k}{2}}=x^0 \Leftrightarrow x^{4-k}=x^0 \Rightarrow k=4$<br>$\Rightarrow T_5$ termenul dezvoltării care nu îl conţine pe *x*. | 2p |
| b) | Dezvoltarea are 9 termeni; termenul din mijloc $T_5 \Rightarrow T_5=C_8^4 x^0=70$ | 1p |
| c) | $T_{k+1}=C_8^k \sqrt{x}^{8-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$<br>$C_8^k \sqrt{x}^{8-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_8^k x^2 \Rightarrow x^{4-k}=x^2 \Rightarrow k=2$<br>$T_3$ este termenul dezvoltării care îl conţine pe $x^2$. | 1p |

**2.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(a,1), B(-1,b), C(2,3)$ şi $D(3,2)$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine numărul real $a$, ştiind că aria triunghiului *ACD* este egală cu 10 u.a.
b) Să se determine numărul real $b$, ştiind că distanţa de la punctul *B* la dreapta *CD* este egală cu $\sqrt{2}$.
c) Stabiliţi o relaţie între *a* şi *b* astfel încât dreptele *AB* şi *CD* să fie paralele.

| | | |
|---|---|---|
| a) | *Soluţie*<br>$A_{\triangle ACD}=\frac{h_A\cdot CD}{2}$; $h_A=dist(A,CD), CD=\sqrt{2}$ | 1p |
| | $CD: x+y-5=0$<br>$dist(A,CD)=\frac{\lvert a-4\rvert}{\sqrt{2}}, A_{\triangle ACD}=\frac{\frac{\lvert a-4\rvert}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}{2}$ | 2p |

***Notă:*** *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

| | | |
|---|---|---|
| | $\dfrac{\dfrac{\lvert a-4\rvert}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}{2}=10, \lvert a-4\rvert=20 \Rightarrow a_1=24, a_2=-16$ | 1p |
| b) | $\begin{array}{l} CD: x+y-5=0 \\ dist(B,CD)=\sqrt{2} \end{array} \Rightarrow \dfrac{\lvert b-6\rvert}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \Rightarrow \lvert b-6\rvert=2, b_1=8, b_2=4$ | 1p |
| c) | AB‖CD $\Rightarrow m_{AB}=m_{CD}, m_{AB}=\dfrac{1-b}{a+1}, m_{CD}=-1 \Rightarrow b=2+a$ sau $a=b-2$ | 2p |

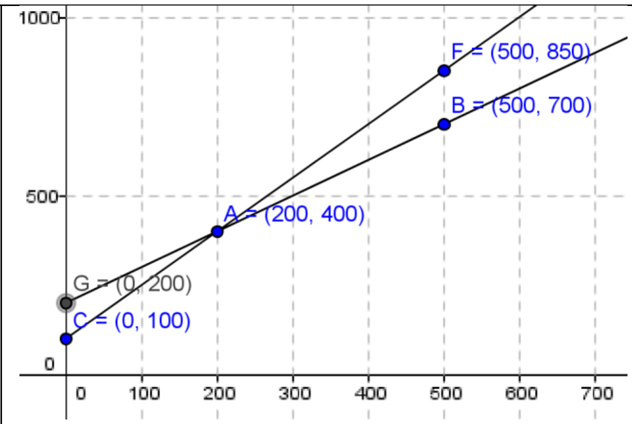
**3.** Un agent de închirieri propune pentru inchirierea unei maşini pentru o zi două tipuri de contracte:
-primul tip: 200 de lei şi încă 1 leu pentru fiecare kilometru parcurs;
-al doilea tip: 100 de lei şi încă 1,5 lei pentru fiecare kilometru parcurs.
Se notează cu $f_1(x)$ preţul pentru *x* kilometri parcurşi în cazul încheierii unui contract de primul tip, iar cu $f_2(x)$ preţul pentru *x* kilometri parcurşi în cazul încheierii unui contract de al doilea tip.

a) Scrieţi expresiile pentru funcţiile $f_1(x)$ şi $f_2(x)$. Reprezentaţi grafic, în acelaşi reper cartezian *xOy*, funcţiile $f_1(x)$ şi $f_2(x)$, pentru $x \in [0,500]$

b) Indicaţi, utilizând graficul, tipul de contract mai avantajos în funcţie de numărul de kilometri parcurşi.

c) Găsiţi şi precizaţi rezultatele de la punctul b) prin calcul.

<table>
<tr><td>a)</td><td><u>Soluţie</u><br>$f_1(x)=200+x$<br>$f_2(x)=100+1,5x$</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
<table>
<tr><td>$x$</td><td>0</td><td>200</td><td>500</td></tr>
<tr><td>$f_1(x)$</td><td>200</td><td>400</td><td>700</td></tr>
<tr><td>$f_2(x)$</td><td>200</td><td>400</td><td>850</td></tr>
</table>
</td><td>1p</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>2p</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| |   Din grafic rezultă că pentru o distanţă de până la 200 km este mai avantajos al doilea tip de contract, iar pentru o distanţă mai mare de 200 km este mai avantajos primul tip de contract. | 1p |
| c) | Calculăm $f_1(x)-f_2(x)$<br>$f_1(x)-f_2(x)=200+x-100-1,5x=100-0,5x$ | 1p |
| | Dacă $100-0,5x>0 \Rightarrow x<200 \Rightarrow f_1(x)>f_2(x)$<br>$f_2(x)$ este mai avantajos decât $f_1(x)$<br>Dacă $100-0,5x<0 \Rightarrow x>200 \Rightarrow f_1(x)<f_2(x)$<br>$f_1(x)$ este mai avantajos decât $f_2(x)$. | 1p |

**4.** Într-o urnă sunt bile mari şi bile mici. Aceste bile sunt albe şi negre. Ştim că sunt 5 bile mari şi 4 bile mici, din care 6 bile sunt albe şi 3 bile sunt negre.

a) Ştiind că 3 bile sunt în acelaşi timp albe şi mari determinaţi:
- -numărul de bile mici şi negre;
- -numărul bilelor mari şi negre;
- -numărul bilelor mici şi albe.

b) Dacă extragem, la întâmplare o bilă din urnă, calculaţi probabilitatea ca aceasta să fie:
- -albă şi mică;
- -albă;
- -mică;
- -albă sau mică.

| | | |
|---|---|---|
| a) | *Soluţie*<br>Ştiind că există 6 bile albe şi 3 bile albe mari $\Rightarrow$ 3 bile albe mici | 1p |
| | Deoarece 5 bile sunt mari, iar 3 bile sunt mari albe rezultă că 2 bile sunt mari negre; | 1p |
| | Din condiţiile că 4 bile sunt mici şi 3 bile sunt mici şi albe, rezultă că 1 bilă este mica neagră.<br>În concluzie avem: 1 bilă mică şi neagră; 2 bile mari şi negre; 3 bile mici şi albe. | 1p |

| | | |
|---|---|---|
| b) | Notăm evenimentele:<br>$A$ : obținerea unei bile albe;<br>$N$ : obținerea unei bile negre<br>$M$ : obținerea unei bile mari<br>$T$ : obținerea unei bile mici | 1p |
| | $P(A\cap T)=\frac{3}{9}=0,(3)$ | 1p |
| | $P(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}=0,(6)$, $P(T)=\frac{4}{9}=0,(4)$ | 1p |
| | $P(A\cup T)=P(A)+P(T)-P(A\cap T)=$<br>$=\frac{6}{9}+\frac{4}{9}-\frac{3}{9}=\frac{7}{9}=0,(7)$ | 1p |