INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = (x+4)(y+4)-4, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că operația este asociativă.

b) Să se calculeze $x \circ (-4)$.

c) Să se calculeze: $(-2014) \circ (-2013) \circ \ldots \circ 2013 \circ 2014$.

a)	*Soluție* $x \circ y = (x+4)(y+4)-4, \forall x, y \in \mathbb{R}$. $(x \circ y) \circ z = xyz + 4xy + 4yz + 4xz + 16x + 16y + 16z + 60$ (1) $x \circ (y \circ z) = xyz + 4xy + 4yz + 4xz + 16x + 16y + 16z + 60$ (2) Din (1) și (2) rezultă că operația este asociativă pentru $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.	1p 1p 1p
b)	$x \circ (-4) = (x+4)(-4+4) - 4 = -4, \forall x \in \mathbb{R}$.	2p
c)	$(-2014) \circ (-2013) \circ \ldots \circ 2013 \circ 2014 =$ $= (-2014) \circ (-2013) \circ \ldots \circ (-5) \circ (-4) \circ (-3) \circ \ldots \circ 2013 \circ 2014 = -4$ deoarece $x \circ (-4) = -4, \forall x \in \mathbb{R}$.	2p

2. În reperul cartezian *xOy*, se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2^n), n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

b) Să se determine ecuația dreptei A_2A_3.

Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A_{2013}, A_{2014}, A_{2015}$.

a)	*Soluție* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 0$. Rezultă că punctele $O(0,0), A_1(1,2), A_2(2,4)$ sunt coliniare.	2p
b)	$A_2(2,4), A_3(3,8)$. Se obține ecuația dreptei $A_2A_3 : 4x - y - 4 = 0$.	2p
c)	Scrie formula ariei cu determinant. Calculează aria și obține: $A_{\triangle A_{2013}A_{2014}A_{2015}} = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 2013 & 2^{2013} & 1 \\ 2014 & 2^{2014} & 1 \\ 2015 & 2^{2015} & 1 \end{vmatrix} \right\| = 2^{2012}$	1p 2p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

3. Un elev își alege o matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$. Prietenul său allege o altă matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$, având grijă ca aceasta să comute cu matricea A($A \cdot B = B \cdot A$), dar astfel încât pătratele celor două matrice să coincidă. Demonstrați că suma celor două matrice este o matrice singulară.

	Soluție Din enunț avem: $A \neq B, A \cdot B = B \cdot A$ și $A^2 = B^2$	2p
	Presupunem că $A+B$ este inversabilă.	1p
	Avem: $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - A\cdot B + B\cdot A - B^2 = O_3$	2p
	Înmulțim la stânga cu $(A+B)^{-1}$ și obținem $A - B = O_3 \Rightarrow A = B$, contradicție.	2p

4. În toate pătrățelele unei table de dimensiuni 5×6 sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie și din fiecare coloană formează progresii aritmetice, în ordinea în care sunt scrise. Suma celor patru numere scrise în colțurile tablei este egală cu $\frac{4028}{15}$. Să se afle suma tuturor numerelor de pe tablă.

	Soluție $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$ numerele scrise pe tablă.	1p
	<u>În linia i,</u> $i = \overline{1,5}$, numerele $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i6}$ formează o progresie aritmetică, a cărei sumă este $\frac{6\cdot(a_{i1}+a_{i6})}{2} = 3\cdot(a_{i1}+a_{i6})$	1p
	Adunând aceste cinci sume se obține suma cerută	1p
	Așadar: $S = 3\cdot(a_{11}+a_{16}+a_{21}+a_{26}+a_{31}+a_{36}+a_{41}+a_{46}+a_{51}+a_{56})$	1p
	$S = 3\cdot[(a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{41}+a_{51})+(a_{16}+a_{26}++a_{36}++a_{46}++a_{56})]$	1p
	$S = 3\cdot[\frac{5\cdot(a_{11}+a_{51})}{2}+\frac{5\cdot(a_{16}+a_{56})}{2}] = \frac{15}{2}\cdot\frac{4028}{15} = 2014$	2p

*<u>**Notă:**</u> Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*