INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protectia mediului

CLASA A IX-A

1. O barcă merge pe un râu în aval (în sensul curgerii râului) şi în amonte (în sens opus curgerii râului), parcurgând în total $56\,km$ în 3 ore. Viteza bărcii în aval este de 20 km/h iar în amonte de 16 km/h. Se cere:
a) Determinaţi viteza curentului apei pe râu şi viteza pe care ar fi avut-o barca dacă s-ar fi deplasat uniform, în aceleaşi condiţii, pe un lac.
b) Determinaţi cele două distanţe parcurse de barcă pe râu, prima în aval şi a doua în amonte.

2. Fie patrulaterul convex $ABCD$ şi $M \in (AC)$, $N \in (BD)$ mijloacele diagonalelor.
a) Arătaţi că $2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
b) Dacă punctele M şi N coincid, demonstraţi că $ABCD$ este paralelogram.

3. În cadrul unui studiu demografic s-a constatat că numărul a_n de locuitori ai unei localităţi nou înfiinţate, în care $n \in \mathbb{N}$ este numărul de ani scurs de la înfiinţarea localităţii, este modelat prin relaţia $a_{n+1} - a_n = 2n - 11$, cu număr de locuitori iniţial $a_0 = 100$.
a) Aflaţi, prin această relaţie, câţi locuitori ar avea localitatea după doi ani de la înfiinţare.
b) Arătaţi că $a_n = n^2 - 12n + 100$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
c) Determinaţi numărul minim de locuitori pe care îl poate atinge localitatea.
d) Arătaţi că, începând cu al şaselea an, populaţia localităţii este în creştere an de an.
e) Aflaţi după câţi ani localitatea are mai mult de 1000 de locuitori.

4. Deşi aparent între prima şi celelalte cerinţe ale următorului enunţ nu este nici o legătură, rezolvarea vă va convinge de contrariul.
a) Arătaţi că $|x| + |y| \geq |x - y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
b) Demonstraţi că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc inegalităţile:
$|x-1| + |x-2015| \geq 2014$ şi $|x-2| + |x-2014| \geq 2012$.
c) Demonstraţi că, pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea:
$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2015| \geq 1007 \cdot 1008$.
d) Rezolvaţi ecuaţia $|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2015| = 1007 \cdot 1008$, în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*