INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

Profil tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Se consideră numărul $a = \log_4 27 + \log_9 16$.

a) Demonstraţi că $\frac{9}{4} < \log_4 27 < \frac{5}{2}$.

b) Demonstraţi că $\frac{5}{4} < \log_9 16 < \frac{3}{2}$.

c) Calculaţi partea întreagă a numărului a.

Soluţie:

a) $\frac{9}{4} < \log_4 27 < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \log_4 4^{\frac{9}{4}} < \log_4 27 < \log_4 4^{\frac{5}{2}}$ 1p

$2^{\frac{9}{2}} < 27 < 4^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 2^9 < 27^2 < 4^5$, adevărat 2p

b) $\frac{5}{4} < \log_9 16 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3^{\frac{5}{2}} < 16 < 9^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 243 < 256 < 729$, adevărat 2p

c) Obţinem $\frac{9}{4} + \frac{5}{4} < a < \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} < a < 4$ 1p

$\frac{7}{2} < a < 4 \Rightarrow [a] = 3$ 1p

2. Se consideră numărul complex $z \neq 1$, astfel încât $\frac{1+z}{1-z} = i\sqrt{3}$.

a) Demonstraţi că $z = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

b) Verificaţi că $z^6 = 1$ şi $1 + z + z^2 + ... + z^5 = 0$.

c) Calculaţi suma $S = 1 + z + z^2 + ... + z^{2016}$.

Soluţie:

a) $\frac{1+z}{1-z} = i\sqrt{3} \Rightarrow 1 + z = i\sqrt{3} - i\sqrt{3} \cdot z \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ 2p

b) Prin calcul direct, deducem:

$z^3 = -1$ 1p

$z^6 = 1$ 1p

$z^6 = 1 \Leftrightarrow z^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$

$z \neq 1 \Rightarrow z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ 1p

c) Grupând termenii sumei obținem:

$S=\left(1+z+...+z^5\right)+\left(z^6+...+z^{11}\right)+...+\left(z^{2010}+...+z^{2015}\right)+z^{2016}$ 1p

$S=0+z^{2016}=\left(z^6\right)^{336}\Rightarrow z=1$ 1p

3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,a)$ şi $B(a,-2)$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați a, astfel încât $AB = 4$.

b) Demonstrați că aria triunghiului AOB este $\mathcal{A}_{AOB}=\dfrac{a^2+4}{2}$.

c) Demonstrați că aria triunghiului AOB este minimă dacă şi numai dacă perimetrul triunghiului AOB este minim.

Soluție:

a) $AB=\sqrt{2\left(a^2+4\right)}$ 1p

$AB=4\Rightarrow\sqrt{2\left(a^2+4\right)}=4\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a\in\{-2,2\}$ 1p

b) $OA=OB=\sqrt{a^2+4}\Rightarrow\Delta AOB$ este isoscel 1p

OC înălțime în ΔAOB isoscel, $OC=\dfrac{\sqrt{2\left(a^2+4\right)}}{2}$ 1p

$\mathcal{A}_{AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot OC=\dfrac{a^2+4}{2}$ 1p

c) $\mathcal{P}_{AOB}=\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{a^2+4}$;

$\mathcal{A}_{AOB}=2,$ minimă atunci când a = 0 .... 1p

$\mathcal{P}_{AOB}=2\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)$ minim când a = 0 .... 1p

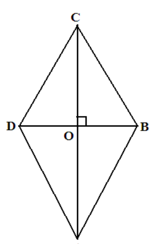
4. a) Demonstrați că $x+y\geq 2\sqrt{xy},\ \forall x,y>0$.

b) Un teren cu suprafața de 400 m^2 are forma unui romb şi trebuie să-l împrejmuim cu un gard. Demonstrați că lungimea gardului este cel puțin 80 m.

Soluție:

a) $x+y-2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0\Rightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}$ 2p

b)



Diagonalele unui romb sunt perpendiculare şi se înjumătățesc.

$\mathcal{A}_{ABCD}=\dfrac{AC\cdot BD}{2}$ 1p

Notăm $BO=a\Rightarrow 400=\dfrac{AC\cdot 2a}{2}\Rightarrow AC=\dfrac{400}{a}\Rightarrow OC=\dfrac{200}{a}$

$BC=\sqrt{a^2+\dfrac{40000}{a^2}}$ 1p

Folosind punctul a) $\Rightarrow BC\geq\sqrt{400}=20$ 2p

$\mathcal{P}_{ABCD}=4BC\geq 80$ 1p