INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2, A^4 şi determinați cel mai mic număr natural $n\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea ca $A^n=I_2$.

b) Demonstrați că dacă matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifica ecuația $A\cdot X=X\cdot A$, atunci exista $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$.

c) Demonstrați că matricea X determinată la punctul anterior verifică egalitatea:
$X^2-(2a+b)\cdot X+(\det X)\cdot I_2=O_2$

Soluție:

a) $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; A^4=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; A^6=I_2 \Rightarrow n=6$ 2p

b) $A\cdot X=\begin{pmatrix} c & d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix}$, $X\cdot A=\begin{pmatrix} -b & a+b \\ -d & c+d \end{pmatrix}$ 2p

$A\cdot X=X\cdot A \Rightarrow c=-b, d=a+b \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}.$ 1p

c) $X^2=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & b^2+2ab \\ -b^2-2ab & a^2+2ab \end{pmatrix}$ 1p

Verifică egalitatea, prin calcul direct 1p

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=m\cdot e^{ax}+n\cdot e^{bx}+p\cdot e^{cx}$, $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, $m,n,p\in\mathbb{R}$, cu proprietatea că $|f(x)|\le|\sin x|, \ \forall x\in(-1,1)$.

a) Calculați $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{x}; k\in\mathbb{R}^*$.

b) Demonstrați că $m+n+p=0$.

c) Demonstrați inegalitatea $|ma+nb+pc|\le 1$.

Soluție:

a) $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{kx}-1}{kx}\cdot k=k\ln e=k$ 2p

b) $|f(x)|\le|\sin x|\Rightarrow\left|m\cdot e^{ax}+n\cdot e^{bx}+p\cdot e^{cx}\right|\le|\sin x|$, $\forall x\in(-1,1)$.

Pentru $x=0\Rightarrow|m+n+p|\le 0\Rightarrow|m+n+p|=0\Rightarrow m+n+p=0$ 2p

c) Putem scrie $\left|m\cdot\left(e^{ax}-1\right)+n\cdot\left(e^{bx}-1\right)+p\cdot\left(e^{cx}-1\right)\right|\le|\sin x|\Rightarrow$

$\left|\frac{am(\mathrm{e}^{ax}-1)}{ax}+\frac{bn(\mathrm{e}^{bx}-1)}{bx}+\frac{cp(\mathrm{e}^{cx}-1)}{cx}\right|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ 2p

Trecem la limita pentru $x\to 0$ si obținem $|am+nb+cp|\le 1$ 1p

3. Se considera trei capitaluri proporționale cu numerele 3, 4, 6. Primul a fost plasat 60 de zile cu dobânda de 6%, al doilea 120 de zile cu dobânda de 9% iar al treilea 180 de zile cu dobânda de 12%. Dobânda simpla totala obținuta este de 510 euro, iar anul bancar are 360 de zile.
a) Sa se scrie sistemul liniar care descrie modelul matematic al problemei.
b) Determinați cele trei capitaluri.

Soluție:

a) Fie x, y, z cele trei capitaluri plasate. Avem $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}$ (1) 1p

și $x\cdot\frac{6}{100}\cdot\frac{60}{360}+y\cdot\frac{9}{100}\cdot\frac{120}{360}+z\cdot\frac{12}{100}\cdot\frac{180}{360}=510$ (2) 2p

Din (1) si (2) se obține sistemul liniar $\begin{cases}4x-3y=0\\3y-2z=0\\x+3y+6z=51000\end{cases}$ 2p

b) Rezolvam sistemul.

$\Delta=\begin{vmatrix}4&-3&0\\0&3&-2\\1&3&6\end{vmatrix}=102$, $\Delta_x=306000$, $\Delta_y=408000$, $\Delta_z=612000$. 1p

Finalizare; x = 3000 euro, y = 4000 euro, z = 6000 euro. 1p

4. Fie funcțiile $f:(\frac{1}{2},\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$, $g:(\frac{1}{2},\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)$.
a) Studiați monotonia funcțiilor f si g.
b) Folosind teorema lui Lagrange pentru funcția f pe intervalul $[n, n+1]$, $n\in\mathbb{N}^*$, demonstrați că $g(n+1)<f(n+1)-f(n)<g(n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $f'(x)=\frac{4}{4x^2-1}>0$ 2p

$f'(x)>0,\forall x\in(\frac{1}{2},\infty)$, deci f este strict crescătoare pe intervalul $(\frac{1}{2},\infty)$ 1p

$g'(x)=f''(x)=\frac{-32x}{(4x^2-1)^2}<0,\forall x\in(\frac{1}{2},\infty)$, rezultă că g este strict descrescătoare pe intervalul $(\frac{1}{2},\infty)$

.... 1p

b) f este funcție Rolle pe [n, n+1], $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci conform teoremei lui Lagrange există $c_n \in (n, n+1)$ astfel încât $f(n+1) - f(n) = f'(c_n) = g(c_n)$ 1p

Cum funcția g este strict descrescătoare avem: $g(n+1) < g(c_n) < g(n)$ 1p

Înlocuind $g(c_n)$ obținem $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n)$ 1p