INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră polinomul $f = x^4 - 8x^3 + ax^2 + 8x + b$, $f \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Arătaţi că $f(1) = 0$ dacă şi numai dacă $a + b + 1 = 0$.

b) Determinaţi valoarea numărului real a pentru care $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

c) Determinaţi numerele reale a şi b astfel încât rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ să fie în progresie aritmetică.

<u>Soluţie:</u>

a) $f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1 - 8 + a + 8 + b = 0 \Leftrightarrow a + b + 1 = 0$ 1p

b) Scrie relaţiile lui Viète 1p

Grupează convenabil şi obţine:

$$\begin{cases} (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3) = 8 \\ (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 = a \\ x_1x_4(x_2 + x_3) + x_2x_3(x_1 + x_4) = -8 \\ (x_1x_4) \cdot (x_2x_3) = b \end{cases}$$

.... 1p

Din prima relaţie şi condiţia dată rezultă că $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 4$ 1p

Din a doua şi a treia relaţie avem: $\begin{cases} x_1x_4 + x_2x_3 = a - 16 \\ x_1x_4 + x_2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 14$ 1p

c) $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ în progresie aritmetică , atunci există $z, r \in \mathbb{C}$ astfel încât:

$x_1 = z - 3r, x_2 = z - r, \ x_3 = z + r, x_4 = z + 3r$.

Din prima relaţie avem $4z = 8 \Rightarrow z = 2$

Relaţiile doi si trei devin $\begin{cases} 10r^2 + a = 24 \\ r^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 14 \\ r^2 = 1 \end{cases}$ 1p

Din ultima relaţie avem $(z^2 - 9r^2) \cdot (z^2 - r^2) = b \Rightarrow b = -15$ 1p

Observaţie: Ecuaţia devine $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0$
Cu $z = 2$ şi $r = \pm 1$ avem rădăcinile $\div -1,1,3,5$ (respectiv $\div 5,3,1-1$)

2. Se consideră inelul aritmetic al claselor de resturi modulo 9 , notat cu $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$.

a) Calculaţi suma în $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$: $s = \hat{1} \cdot \hat{2} + \hat{2} \cdot \hat{3} + \hat{3} \cdot \hat{4} + \hat{4} \cdot \hat{5} + \hat{5} \cdot \hat{6} + \hat{6} \cdot \hat{7} + \hat{7} \cdot \hat{8}$

b) Să se rezolve ecuaţia matriceală în inelul matricelor $M_2(\mathbb{Z}_9)$: $\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{5} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{7} & \hat{8} \end{pmatrix}$

c) Arătați că matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}_9)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A\in\{\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}\}$.

Soluție:

a) $s=\hat{1}\cdot\hat{2}+\hat{2}\cdot\hat{3}+\hat{3}\cdot\hat{4}+\hat{4}\cdot\hat{5}+\hat{5}\cdot\hat{6}+\hat{6}\cdot\hat{7}+\hat{7}\cdot\hat{8}=\hat{2}+\hat{6}+\hat{3}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{6}+\hat{2}=\hat{6}$ 1p

b) Calculează inversa matricei $\begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{5}\\ \hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix}$. Determinantul matricei este $\begin{vmatrix}\hat{4} & \hat{5}\\ \hat{3} & \hat{1}\end{vmatrix}=\hat{7}$.

Inversul lui $\hat{7}$ (modulo 9) este $\hat{4}$. Inversa matricei este $\begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{7}\\ \hat{6} & \hat{7}\end{pmatrix}$ 2p

Obține soluția $X=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{6}\\ \hat{1} & \hat{8}\end{pmatrix}$. 1p

c) Elementele inversabile din $(\mathbb{Z}_9,+,\cdot)$ sunt $\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}$. 1p

Matricea A este inversabilă ceea ce implică $\det A$ diferit de zero şi de divizorii lui zero ai inelului.

Prin urmare $\det A\in\{\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}\}$ 1p

Reciproc, deoarece $\det A\in\{\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}\}$, iar $\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}$ sunt inversabile in inel, rezultă că matricea este inversabilă. 1p

3. Se consideră numerele $I(a)=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+ax+1}dx$ şi $J(a)=\int_0^1\frac{1}{e^x+ax+1}dx$, unde $a\in[0,+\infty)$ este parametru.

a) Calculați $I(0)$.

b) Calculați $J(0)$.

c) Determinați numărul real pozitiv a pentru care este adevărată relația: $I(a)+a\cdot J(a)=2$

Soluție:

a) $I(0)=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\ln(e^x+1)\Big|_0^1=\ln\frac{e+1}{2}$ 2p

b) $I(0)+J(0)=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx+\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^x+1}{e^x+1}dx=\int_0^1 dx=1$ 1p

$J(0)=1-I(0)=1-\ln\frac{e+1}{2}=\ln\frac{2e}{e+1}$ 1p

(sau calculează direct $J(0)$)

c) $I(a)+aJ(a)=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+ax+1}dx+a\int_0^1\frac{1}{e^x+ax+1}dx=\int_0^1\frac{e^x+a}{e^x+ax+1}dx=$ 1p

$=\ln(e^x+ax+1)\Big|_0^1=\ln\frac{e+a+1}{2}$ 1p

$\ln\frac{e+a+1}{2}=2\Leftrightarrow e+a+1=2e^2$. Soluția este $a=2e^2-e-1>0$ 1p

4. Rata cu care o familie utilizează, într-o zi, energia electrică (în kW / oră) este $K(t)$ dată de relația $K'(t)=5t\cdot e^{-t}$, unde $t\in[0;24]$ este timpul exprimat în ore.

a) Câți kW foloseşte familia în primele 4 ore ale zilei?

b) Câți kW consumă familia în 30 de zile?

(În calcule se va lua $e \simeq 3$. Rezultatele se vor exprima sub formă zecimală cu două zecimale exacte.)

<u>Soluție:</u>

Consumul pentru primele 4 ore este dat de $\int_0^4 K^{/}(t)dt = \int_0^4 5te^{-t}dt$ 2p

Calculează $K(\text{t})\Big|_0^4 = \int_0^4 5te^{-t}dt = 5(-te^{-t}\,|_0^4 - e^{-t}\,|_0^4) = 5(1-5\cdot e^{-4})$ 2p

Calculul aproximativ al consumului de energie electrică pentru primele 4 ore (cu $e \simeq 3$) este $5(1-5\cdot e^{-4}) \simeq 4,69$ kW. 1p

b) Într-o zi se consumă $4,69\cdot 6 = 28,14$ kW.

În 30 de zile familia va consuma $(4,69\cdot 6)\cdot 30 = 844,2$ kW 2p