



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ

2 mai 2015

Profil Tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

- Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Calculați A^2, A^4 și determinați cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea ca $A^n = I_2$.
 - Demonstrați că dacă matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ verifică ecuația $A \cdot X = X \cdot A$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$.
 - Demonstrați că matricea X determinată la punctul anterior verifică egalitatea:
 $X^2 - (2a+b) \cdot X + (\det X) \cdot I_2 = O_2$
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = m \cdot e^{ax} + n \cdot e^{bx} + p \cdot e^{cx}$, $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $m, n, p \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că $|f(x)| \leq |\sin x|$, $\forall x \in (-1, 1)$.
 - Calculați $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{x}$; $k \in \mathbb{R}^*$.
 - Demonstrați că $m + n + p = 0$.
 - Demonstrați inegalitatea $|ma + nb + pc| \leq 1$.
- Se considera trei capitaluri proporționale cu numerele 3, 4, 6. Primul a fost plasat 60 de zile cu dobânda de 6%, al doilea 120 de zile cu dobânda de 9% iar al treilea 180 de zile cu dobânda de 12%. Dobânda simplă totală obținută este de 510 euro, iar anul bancar are 360 de zile.
 - Sa se scrie sistemul liniar care descrie modelul matematic al problemei.
 - Determinați cele trei capitaluri.
- Fie funcțiile $f: (\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$, $g: (\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f'(x)$.
 - Studiați monotonia funcțiilor f și g .
 - Folosind teorema lui Lagrange pentru funcția f pe intervalul $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.