INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Să se determine funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, astfel încât:

a) $f(1)=2015$;

b) $f(m+n)=f(n)\cdot f(m), (\forall)n,m\in\mathbb{N}^*$

Soluție:

Din b), pentru $m = 1$, avem $f(n+1)=2015\cdot f(n), (\forall)n\in\mathbb{N}^*$ 2p

$f(1)=2015\Rightarrow f(2)=2015\cdot f(1)=2015^2$ 1p

Presupunem că $f(n)=2015^n$ 1p

Din $f(n+1)=2015\cdot f(n)\Rightarrow f(n+1)=2015^{n+1}$ 2p

Conform inducției matematice rezultă că $f(n)=2015^n, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$ 1p

2. Se dă funcția $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{15-x}(x+5)$.

a) Aflați domeniul maxim de definiție al funcției *f*.

b) Rezolvați ecuația $f(x)=2$.

c) Calculați aria triunghiului format de origine şi punctele de intersecție ale graficului funcției *f* cu axele de coordonate.

Soluție:

a) Condițiile de existență: $\begin{cases}15-x>0\\15-x\neq 1\\x+5>0\end{cases}$ 1p

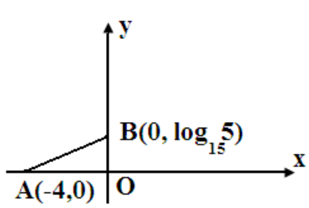
Obține $x\in(-5,15)\setminus\{14\}\Rightarrow D=(-5,15)\setminus\{14\}$ 1p

b) $f(x)=2\Rightarrow\log_{15-x}(x+5)=2\Rightarrow x+5=(15-x)^2$ 1p

Rezultă că $x^2-31x+220=0\Rightarrow x_1=20\notin D$ (nu convine) şi $x_2=11\in D$ (soluție) 1p

c) $G_f\cap(Ox)\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow x+5=1\Rightarrow x=-4\in D\Rightarrow A(-4,0)$ 1p

$G_f\cap(Oy)\Rightarrow f(0)=\log_{15}5>0\Rightarrow B(0,\log_{15}5)$ 1p



$\mathcal{A}_{\Delta AOB}=\dfrac{OA\cdot OB}{2}=2\log_{15}5$ 1p

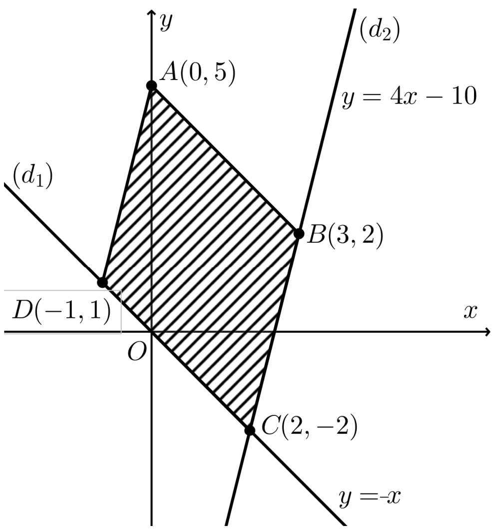
3. Se consideră dreptele: $(d_1): x+y=0, (d_2): y=4x-10$ şi punctul $A(0,5)$. Calculați perimetrul şi aria paralelogramului care are un vârf în punctul A, iar (d_1) şi (d_2) sunt drepte suport pentru două dintre laturile paralelogramului.

Soluție:

$A(0,5)\notin(d_1)$ şi $A(0,5)\notin(d_2)\Rightarrow(d_1)\cap(d_2)=\{C\}$, unde C este vârful opus vârfului A 1p

$(d_1)\cap(d_2)\Rightarrow\begin{cases}x+y=0\\ y=4x-10\end{cases}\Rightarrow C(2,-2)$ 1p

Figură corectă 1p



$(AB)\parallel(d_1)\Rightarrow(AB): x+y=5,$

$(AB)\cap(d_2)\Rightarrow B(3,2)$ 1p

$(AD)\parallel(d_2)\Rightarrow(AD): y=4x+5$

$(AD)\cap(d_1)\Rightarrow D(-1,1)$ 1p

$AB=3\sqrt{2}; AD=\sqrt{17}\Rightarrow$

$\mathcal{P}=2\cdot AB+2\cdot AD=6\sqrt{2}+2\sqrt{17}$ 1p

$h_A=d\left(A,(d_1)\right)=\dfrac{5}{\sqrt{2}}.$

$\mathcal{A}_P=AB\cdot h_A=15$ 1p

4. Pentru buna desfăşurare a olimpiadei de matematică aplicată au fost alocate 7 cabinete şi 7 chei distincte, fără a se preciza cheia corespunzătoare pentru nici unul dintre cabinete. Care este numărul maxim de încercări ce trebuie făcute pentru a stabili care cheie corespunde fiecărui cabinet ?

Soluție:

Pentru primul cabinet se încearcă cel mult 6 chei (dacă primele 6 chei nu corespund, a şaptea este cea bună şi se lasă în yală) 2p

Pentru al doilea cabinet se încearcă cel mult 5 chei, pentru al treilea cabinet cel mult 4 chei, etc.
.... 2p

Pentru al şaselea cabinet se încearcă cel mult o cheie din cele 2 rămase, iar pentru al şaptelea cabinet este cheia rămasă (deci nici o încercare) 2p

Numărul maxim de încercări este 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 .... 1p