INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiinţe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}\right\}\subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Demonstraţi că dacă $A,B\in\mathcal{M}$, atunci $A+B\in\mathcal{M}$ şi $A\cdot B\in\mathcal{M}$

b) Determinaţi matricea $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}$ cu proprietatea ca $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

c) Determinaţi matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}$ astfel încât: $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2$

Soluţie:

a) $A+B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & a+c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ 1p

$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ 2p

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a\end{pmatrix}=I_2\Rightarrow\ a=1, b=-2$ 2p

c) $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2\end{pmatrix}; A^3=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3\end{pmatrix}; A^4=\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4\end{pmatrix};\ \ldots\ ; A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n\end{pmatrix}$ (inducţie matematică) 1p

Daca n este număr par, atunci $a=1$, $b=\frac{2}{n}$ sau $a=-1$, $b=-\frac{2}{n}$ iar daca n este impar atunci $a=1$ şi $b=\frac{2}{n}$ 1p

2. Pe mulţimea $G=(1,\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $*:G\to G$, dată de $x*y=xy-x-y+2,\ (\forall)x,y\in G$

a) Să se demonstreze ca legea este asociativa

b) Să se determine elementele simetrizabile ale mulţimii G in raport cu legea $*$

c) Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{x*x*x*\ldots*x}_{2015\text{ ori}}=2$

Soluţie:

a) $(x*y)*z=x*(y*z)=xyz-xy-yz-xz+x+y+z, (\forall)x,y,z\in G$ 2p

b) $x*e=e*x=x\Rightarrow e(x-1)=2(x-1), (\forall)x\in G\Rightarrow e=2\in(1,\infty)$ 1p

$x * x' = 2 \Rightarrow xx' - x - x' = 0 \Rightarrow \ x' = \dfrac{x}{x-1} \in (1, \infty)$ 2p

c) $x * y = (x-1)(y-1) + 1 \Rightarrow x * x = (x-1)^2 + 1$

$\underbrace{x * x * x * ... * x}_{2015 \text{ ori}} = (x-1)^{2015} + 1 = 2 \Rightarrow (x-1)^{2015} = 1 \Rightarrow x = 2$ 2p

3. Un stadion are o capacitate de 900 locuri. La un spectacol s-au vândut toate biletele. Un bilet pentru copii costa 20 lei, pentru elevi 30 lei şi pentru adulți 40 lei. Se ştie că numărul adulților a fost jumătate din numărul copiilor şi elevilor la un loc, iar la spectacol s-au încasat 27000 lei. Determinați numărul de spectatorilor din fiecare categorie.

Soluție:

Fie x, numărul copiilor, y numărul elevilor şi z numărul adulților 1p

Avem:

$$\begin{cases} x + y + z = 900 \\ 20x + 30y + 40z = 27000 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 900 \\ 2x + 3y + 4z = 2700 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$ 1p

Cu regula lui Cramer avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$ 1p

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 900 & 1 & 1 \\ 2700 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -900$$ 1p

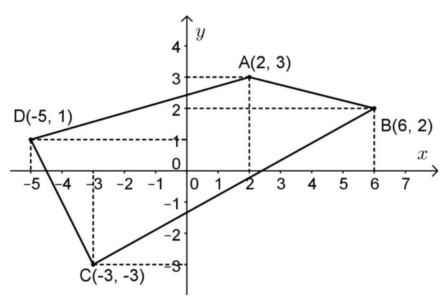
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 900 & 1 \\ 2 & 2700 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -900$$ 1p

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 900 \\ 2 & 3 & 2700 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -900$$ 1p

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 300$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 300$; $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = 300$ 1p

4. O picătura de apa ia forma unui patrulater $ABCD$ cu $A(2, 3)$, $B(6, 2)$, $C(-3, -3)$, $D(-5, 1)$. Aflați aria acesteia. Daca picătura ar lua forma unui pătrat, cu aceeaşi arie, cat ar fi latura pătratului ?

Soluție:



$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{BCD}$ 1p

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{15}{2}$$ 2p

$$\mathcal{A}_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 23$$ 2p

$\frac{15}{2} + 23 = \frac{61}{2}$ =30,5 .... 1p

L= $\sqrt{30,5} \simeq 5,52268$ 1p

(*Orice alta metoda corecta folosita pentru aflarea ariei .... 7p*)