INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Considerăm mulţimile $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+(a-1)\cdot x-a=0\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{R} \mid a\cdot x^2-(2a+1)\cdot x+a+1=0\}$, $a\in\mathbb{R}^*$.

a) Arătaţi că 1 aparţine mulţimilor A şi B.
b) Determinaţi mulţimile A şi B.
c) Să se determine valoarea lui ***a*** ştiind că $A\cup B\subset\mathbb{Z}$.

Soluţie.
a) Verificare $1\in A$ 1p
$1\in B$ 1p
b) Se obține $A=\{1,-a\}$ 1p
$B=\left\{1,\frac{a+1}{a}\right\}$ 1p
c) Din $A\cup B\subset\mathbb{Z}$, rezultă că $a\in\mathbb{Z}$ şi $\frac{a+1}{a}\in\mathbb{Z}$ 1p
Finalizare $a\in\{-1,1\}$ 2p

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-\frac{x^2}{2}+2x$, precum şi numerele $u=a^2-2a+3$ şi $v=1+2a-a^2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Reprezentaţi graficul funcţiei f.
b) Demonstraţi că $v\le 2\le u, (\forall)a\in\mathbb{R}$.
c) Demonstraţi că $\frac{f(u)+f(v)}{2}\le f\left(\frac{u+v}{2}\right), (\forall)a\in\mathbb{R}$.

Soluţie.
a) Reprezentarea corectă a graficului 1p
b) Se verifică $v\le 2\Leftrightarrow(a-1)^2\ge 0$, adevărat 1p
$u\ge 2\Leftrightarrow(a-1)^2\ge 0$, adevărat 1p
c) Deoarece $-\frac{1}{2}<0\Rightarrow f(x)\le 2, \ (\forall)x\in\mathbb{R}$ 1p
Deducem că $f(u)\le 2, f(v)\le 2$ 1p

Rezultă că $\frac{f(u)+f(v)}{2} \leq 2$ 1p

Dar $\frac{u+v}{2}=2$, deci $\frac{f(u)+f(v)}{2} \leq f\left(\frac{u+v}{2}\right), (\forall) a \in \mathbb{R}$ 1p

3. Un triunghi are un unghi obtuz iar lungimile laturilor sunt numere naturale în progresie aritmetică cu raţia 2. Determinaţi perimetrul triunghiului.

Soluţie.

Fie $\triangle ABC$ $AB=a$, $AC=a+2$ şi $BC=a+4$ 1p

Deducem că $m(\measuredangle A) > 90^\circ$ 1p

Folosind teorema cosinusului $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\measuredangle A)$ 1p

Obținem $\cos(\measuredangle A) = \frac{a^2-4a-12}{2a(a+2)}$ 1p

Din $m(\measuredangle A) > 90^\circ \Rightarrow \cos(\measuredangle A) < 0 \Rightarrow a^2-4a-12<0$ 1p

Se obține $a \in (-2,6) \cap N^* = \{1,2,3,4,5\}$ 1p

Convin numai $a \in \{3,4,5\}$, deci perimetrul poate fi 15, 18 sau 21 .... 1p

4. Pentru a termina o lucrare, 5 muncitori au nevoie de 20 de zile. Ei lucrează la lucrare un număr de ***n*** zile, $5 \leq n \leq 11$, după care un muncitor pleacă la o altă lucrare. În câte zile vor termina lucrarea cei 4 muncitori rămaşi?

Soluţie.

Un muncitor execută într-o zi $\frac{1}{100}$ din lucrare 1p

În ***n*** zile, toți muncitorii vor executa $\frac{n}{20}$ din lucrare 1p

Rămâne de executat $\frac{20-n}{20}$ din lucrare 1p

Fie *x* - numărul de zile necesare terminării lucrării de către cei 4 muncitori.

Ei vor executa $\frac{4x}{100}$ din lucrare 1p

Deci $\frac{4x}{100} = \frac{20-n}{20} \Rightarrow x = \frac{100-5n}{4} = 25 - \frac{5n}{4}$ 1p

Deducem că $\frac{5n}{4} \in \mathbb{N} \Rightarrow n \vdots 4$, de unde numai n=8 convine 1p

Finalizare x = 15 zile 1p