INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Se consideră mulţimea $M=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1\}$

a) Demonstraţi că $z_1=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $z_2=\cos t-i\cdot\sin t$ aparţin mulţimii M, oricare ar fi $t\in\mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că pentru orice $z_1,z_2\in M$ şi produsul $z_1\cdot z_2\in M$.

c) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei “ ***Dacă*** $z_1\cdot z_2\in M$ ***şi*** $z_1\in M$***, atunci*** $z_2\in M$ ”

Soluţie.

a) Deoarece $|z_1|=1$ şi $|z_2|=1$, rezultă că $z_1,z_2\in M$ 2p

b) Dacă $z_1,z_2\in M$, atunci $|z_1|\le 1$ şi $|z_2|\le 1$.

Folosind proprietăţile modulului $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\le 1$, deci $z_1\cdot z_2\in M$ 3p

c) Propoziţia este falsă. Un contraexemplu îl poate constitui numerele complexe z_1,z_2 cu $|z_1|=\frac{1}{9}$ şi $|z_2|=3$. În acest caz $|z_1\cdot z_2|=\frac{1}{3}\le 1$, deci $z_1\cdot z_2\in M$ **şi** $z_1\in M$ **,** dar $z_2\notin M$ 2p

2. Se consideră dreptele $(d_m): y=m\cdot x+\sqrt{3}-m,\ m\in\mathbb{R}$

a) Pentru $m=1$, determinaţi coordonatele simetricului punctului $O(0,0)$ faţă de dreapta (d_1).

b) Demonstraţi că dreptele (d_m) trec printr-un punct fix.

c) Dacă $m,n\in\mathbb{R},\ m\ne n$, $OP\perp d_m,\ OQ\perp d_n$, să se demonstreze că $PQ\le 4$.

Soluţie.

a) $(d_1): y=x+\sqrt{3}-1$.Fie $A(a,b)$ simetricul originii. Atunci $OA\perp d_1\Leftrightarrow \frac{b}{a}=-1$ 1p

Mijlocul segmentului $[OA]\in(d_1)\Leftrightarrow \frac{b}{2}=\frac{a}{2}+\sqrt{3}-1$ 1p

Se obţine $a=1-\sqrt{3}, b=\sqrt{3}-1$, deci punctul căutat este $A\left(1-\sqrt{3},\sqrt{3}-1\right)$ 1p

b) $(d_m): m(x-1)-y+\sqrt{3}=0, (\forall)m\in\mathbb{R}$ rezultă că $x-1=0$ şi $-y+\sqrt{3}=0$, deci $F\left(1,\sqrt{3}\right)$ este punctul fix căutat 2p

c) Dacă F este punctul fix , atunci $F\in d_m, F\in d_n, m\ne n$

Atunci $OP\le OF=2, OQ\le OF=2$ 1p

Folosind inegalitatea triunghiulară $PQ\le OP+OQ\le 4$ 1p

3. Se consideră mulţimea $M_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$

a) Determinaţi valoarea lui ***n*** ştiind că mulţimea M_n are 21 de submulţimi nevide cu cel mult două elemente.

b) Pentru n = 6, determinaţi numărul perechilor (A, B) formate din mulţimi având două elemente în comun şi $A \bigcup B = M_6$.

Soluţie.

a) Numărul submulțimilor cu 1 un element este egal cu n 1p

Numărul submulțimilor cu 2 elemente este egal cu $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 1p

Din relația $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 21$, se obține $n = 6$ 1p

b) Elementele comune pot fi alese în $C_6^2 = 15$ moduri 2p

Fiecare dintre celelalte 4 elemente ale reuniunii poate fi distribuit în 2 moduri (sau în A, sau în B) 1p

Conform regulii produsului , vor exista $15 \cdot 2^4 = 240$ perechi (A, B) 1p

4. Într-o colonie formată din n = 2016 bacterii intră un virus. În primul minut el omoară două bacterii , apoi se divizează în doi noi viruşi şi concomitent fiecare dintre bacteriile rămase se divizează de asemenea în alte două bacterii. În minutul următor cei doi viruşi omoară câte două bacterii, apoi cei doi viruşi şi toate bacteriile rămase se divizează din nou în două, şi aşa mai departe. După cât timp întreaga colonie de bacterii va fi omorâtă?(în ore şi minute)

Soluţie.

La momentul $t_0 = 0$ avem un virus şi n = 2016 bacterii 1p

La momentul $t_1 = 1$ avem 2 viruşi şi $2(n-2)$ bacterii 1p

La momentul $t_2 = 2$ avem 2^2 viruşi şi $2^2(n-4)$ bacterii 1p

La momentul $t_3 = 3$ avem 2^3 viruşi şi $2^3(n-6)$ bacterii 1p

La momentul $t_k = k$ avem 2^k viruşi şi $2^k(n-2k)$ bacterii 1p

Deoarece n = 2016 impunem condiţia ca 2016 - 2k = 0, de unde k = 1008 minute 1p

Aşadar întreaga colonie va fi omorâtă în 16 ore şi 48 de minute 1p