INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ 7 mai 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2x}+x+\cos x$

a) Să se studieze monotonia lui *f*.

b) Să se arate că *f* este bijectivă.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{f^{-1}(x)}$.

Soluţie.

a) $f'(x)=2\cdot e^{2x}+1-\sin x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ deci *f* este strict crescătoare 1p

b) *f* strict crescătoare, rezultă *f* funcţie injectivă 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(e^{2x}+x+\cos x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, *f* continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ funcţie surjectivă 2p

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{f^{-1}(x)}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\ln(e^{2y}+y+\cos y)}{y}=$ 1p

$\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{2y+\ln(1+\frac{y}{e^{2y}}+\frac{\cos y}{e^{2y}})}{y}=$ 1p

$\lim\limits_{y\to\infty}[2+\dfrac{1}{y}\ln(1+\dfrac{y}{e^{2y}}+\dfrac{\cos y}{e^{2y}})]=2$ 1p

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{x}-3\ln\sqrt{x}$.

a) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x_0=4$.

b) Să se demonstreze că $x\sqrt{x}\ge 3\ln\sqrt{x}+1,\ \forall x>0$.

c) Demonstraţi că $\dfrac{1\sqrt{1}+2\sqrt{2}+...+n\sqrt{n}}{n}\ge 1+3\ln\sqrt[2n]{n!},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie.

a) Avem $f'(x)=\left(x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}\ln x\right)'=\dfrac{3(x^{\frac{3}{2}}-1)}{2x}$ .... 1 p

iar ecuaţia tangentei este : $(t):\ 21x-8y-20-24\ln 2=0$ .... 2 p

b) $f'(x)=0 \iff x=1$ 1p

x	0		1		∞
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - - - - - -		0	+ + + + + + + + + + + + +	
$f(x)$		$\searrow$	m (1)	$\nearrow$	

Deoarece $f(x)\ge 1$, $(\forall)x\in\mathbb{R}_+^*$ rezultă că $x\sqrt{x} \ge 3\ln\sqrt{x}+1$, $\forall x>0$ 1p

c) Folosind succesiv inegalitatea de la b) obţinem:

$$1\sqrt{1} \ge 3\ln\sqrt{1}+1$$
$$2\sqrt{2} \ge 3\ln\sqrt{2}+1$$
$$3\sqrt{3} \ge 3\ln\sqrt{3}+1$$
$$\vdots$$
$$n\sqrt{n} \ge 3\ln\sqrt{n}+1$$

Prin adunare: $1\sqrt{1}+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n} \ge 3\ln\sqrt{n!}+n$

$\dfrac{1\sqrt{1}+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}}{n} \ge 3\ln\sqrt[2n]{n!}+1$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$ 2p

3. a) Dacă $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det(A)=504$, să se determine $\det(2\cdot A)$.

b) Dacă $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A)\neq 0$, să se demonstreze că $\det(A^*)=\det(A)$;

A^* - reprezintă matricea adjunctă asociată matricei A.

c) Dacă $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A)\neq 0$ şi $A^*=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, să se determine matricea A..

Soluţie.

a) Deoarece $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ va rezulta că $\det(2\cdot A)=2^2\cdot\det(A)=2016$ 2p

b) Deoarece $\det(A)\neq 0$ rezultă că $A^*=\det(A)\cdot A^{-1}$ 1p

Ţinând cont că $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)} \Rightarrow \det(A^*)=\left[\det(A)\right]^2\cdot\dfrac{1}{\det(A)}=\det(A)$ 1p

c) Folosind punctul anterior deducem că $\det(A^*)=\det(A)=2$ 1p

Atunci $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 1p

Se obţine că $A=\left(A^{-1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ 1p

4. O firmă de deszăpezire are la dispoziţie echipele A, B, C pentru a interveni la o urgenţă. Analizând situaţia s-a constatat ca echipele A şi B ar remedia situaţia în 12 ore, echipele B şi C ar remedia situaţia în 15 ore , iar echipele A şi C remedia situaţia în 20 de ore .

a) În câte ore ar remedia situaţia cele trei echipe lucrând împreună ?

b) Dacă numai o echipă poate fi repartizată acestei lucrări, care este timpul minim în care va fi remediată situaţia?

Soluţie.

a) Notăm cu x, y, z numărul de ore necesare echipelor A, B, respectiv C pentru a termina lucrarea, lucrând singure 1p

Într-o oră echipa A execută $\frac{1}{x}$ din lucrare, echipa B execută $\frac{1}{y}$ din lucrare , iar echipa C execută $\frac{1}{z}$ din lucrare 1p

Putem obţine $\begin{cases} 12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \\ 15\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1 \\ 20\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=1 \end{cases}$ 1p

Din sistemul anterior se obţine $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow 10\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$, deci cele trei echipe lucrând împreună ar remedia urgenţa în 10 ore 2p

b) Din relaţiile anterioare se obţine că $x=30, y=20, z=60$, deci timpul minim în care va fi remediată urgenţa de către o singură echipă este de 20 de ore , când este trimisă echipa B 2p