INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

## ETAPA NAŢIONALĂ
## 7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Profil tehnic**

## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
## CLASA A XII-A

**1.** Se consideră polinomul $f = 2X^3 - 5X^2 + aX - 4$ , $f \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ .

a) Arătați că $2X - 1 / f$ dacă și numai dacă $a = 10$.

b) Dacă $a = 10$ descompuneți în factori ireductibili polinomul $f$ .

c) Determinați numărul real $a$ astfel încât $\dfrac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3} = -\dfrac{127}{16}$ .

**Soluție**

a) $2X - 1 / f \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{4} + a \cdot \frac{1}{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 10$ ................................................ 1p

b) $f = 2X^3 - 5X^2 + 10X - 4 = (2X - 1)(X^2 - 2X + 4) = (2X - 1)(X - 1 - i\sqrt{3})(X - 1 + i\sqrt{3})$ ......... 2p

c) Scriem relațiile lui Viete și se înlocuiesc valorile în expresia dată.

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{5}{2}\left(S_1^2 - 2S_2\right) - \frac{a}{2} S_1 + 6 = \frac{173 - 30a}{8}$ ..................................................................... 2p

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{\frac{173 - 30a}{8}}{2}.$$

Se obține ecuația în necunoscuta $a$ : $\frac{173 - 30a}{16} = -\frac{127}{16} \Leftrightarrow a = 10$ ................................................ 2p

**2.** Se consideră inelul matricelor $\left(M_2(\mathbb{Z}_3), +, \cdot\right)$ și submulțimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{b} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{a} + \hat{c} \end{pmatrix} \mid \det A \neq \hat{0} \quad \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_3 \right\} \subset M_2(\mathbb{Z}_3),$$

unde $\left(\mathbb{Z}_3, +, \cdot\right)$ este corpul claselor de resturi modulo 3.

a) Arătați că pentru oricare două matrice $X, Y \in G \Rightarrow X \cdot Y \in G$ .

b) Determinați elementele mulțimii $G$ .

c) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup. Este grupul $(G, \cdot)$ comutativ? Justificați răspunsul.

**Soluție**

a) $X = \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{b} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{a} + \hat{c} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \hat{x} + \hat{y} & \hat{y} \\ \hat{z} & \hat{x} + \hat{z} \end{pmatrix}$

$X, Y \in G \Rightarrow \det X \neq \hat{0}, \det Y \neq \hat{0}$ .

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} \hat{a}\hat{x} + \left(\hat{a}\hat{y} + \hat{b}\hat{x} + \hat{b}\hat{y} + \hat{b}\hat{z}\right) & \hat{a}\hat{y} + \hat{b}\hat{x} + \hat{b}\hat{y} + \hat{b}\hat{z} \\ \hat{a}\hat{z} + \hat{c}\hat{x} + \hat{c}\hat{y} + \hat{c}\hat{z} & \hat{a}\hat{x} + \left(\hat{a}\hat{z} + \hat{c}\hat{x} + \hat{c}\hat{y} + \hat{c}\hat{z}\right) \end{pmatrix} (1)$$

$\det(XY) = \det X \cdot \det Y \neq \hat{0}$ (2). Din (1) și (2) rezultă mulțimea G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z}_3)$ în raport cu operația de înmulțire indusă ............................................................................................ 3p

b) $\det A = \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{b} + \hat{a}\hat{c} = a(\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}) \neq \hat{0} \Rightarrow \det A \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$ ............................................................ 1p

Pentru $\det(A) = \hat{1}$ se obțin : $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$ ................................ 1p

Pentru $\det(A) = \hat{2}$ se obțin: $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$ ........................... 1p

c) Notând elementele lui G se întocmește tabla operației și se deduce faptul că este bine structurată (fiecare element apare odată și numai odată pe fiecare linie și coloană).
Din tabla operației se deduce faptul că legea este *necomutativă* ..................................................... 1p

**3.** Se consideră funcţia continuă $f:[-2,-1] \to [-4,-3]$, astfel încât $\int_{-2}^{-1} f^2(x)dx = \frac{3}{4}$. Să se demonstreze că:

a) $[f(x)+4] \cdot [f(x)+3] \leq 0, (\forall) x \in [-2,-1]$.

b) $\frac{-49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2,-1]$.

c) $28 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx \in [-52,-51]$.

**Soluție:**

a) Deoarece $f(x) \geq -4$ şi $f(x) \leq -3, (\forall) x \in [-2,-1]$ va rezulta că

$[f(x)+4] \cdot [f(x)+3] \leq 0, (\forall) x \in [-2,-1]$ ........................................................................ 2p

b) Din inegalitatea de mai sus , rezultă $f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2,-1]$ ........................... 1p

Din relaţia $\left(f(x) + \frac{7}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x), (\forall) x \in [-2,-1]$

Aşadar $\frac{-49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2,-1]$ ................................................................ 2p

c) Integrând în dubla inegalitate de mai sus obţinem

$-\frac{49}{4} \leq \int_{-2}^{-1} f^2(x)dx + 7 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx \leq -12$, de unde se obţine $28 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx \in [-52,-51]$ ............ 2p

**4.** Trei tractoare A, B şi C ar ara un teren în 7 ore , arând împreună. După ce au arat împreună timp de 5 ore , se defectează tractorul C iar cele două tractoare rămase ar termina de arat restul terenului în 4 ore. După 2 ore de la defectarea tractorului C , tractorul B este folosit la o altă lucrare , rămânând tractorul A care termină de arat terenul încă în 6 ore. În câte ore ar termina de arat terenul fiecare dintre tractoarele A, B, şi C dacă ar ara singure ?

**Soluție**

Notăm cu x, y, z numărul de ore necesare tractoarelor A, B, respectiv C pentru a ara terenul, lucrând singure ........................................................................................................................ 1p

Într-o oră tractorul A ară $\frac{1}{x}$ din suprafaţa terenului, tractorul B ară $\frac{1}{y}$ din suprafaţa terenului iar tractorul C ară $\frac{1}{z}$ din suprafaţa terenului ........................................................................... 2p

Putem obţine $\begin{cases} 7\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1 \\ 5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \\ 5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{6}{x}=1 \end{cases}$ ................................................................... 2p

Rezultă $x=42$ ore, $y=21$ ore şi $z=14$ ore ........................................................................... 2p