



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



**ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016
Profil Tehnic**

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Se consideră polinomul $f = 2X^3 - 5X^2 + aX - 4$, $f \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
- a) Arătați că $2X - 1 \mid f$ dacă și numai dacă $a = 10$.
- b) Dacă $a = 10$ descompuneți în factori ireductibili polinomul f .
- c) Determinați numărul real a astfel încât $\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3} = -\frac{127}{16}$.
2. Se consideră inelul matricelor $(M_2(\mathbb{Z}_3), +, \cdot)$ și submulțimea
- $$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{b} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{a} + \hat{c} \end{pmatrix} \mid \det A \neq \hat{0}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_3 \right\} \subset M_2(\mathbb{Z}_3),$$
- unde $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ este corpul claselor de resturi modulo 3.
- a) Arătați că pentru oricare două matrice $X, Y \in G \Rightarrow X \cdot Y \in G$.
- b) Determinați elementele mulțimii G .
- c) Arătați că (G, \cdot) este grup. Este grupul (G, \cdot) comutativ? Justificați răspunsul.
3. Se consideră funcția continuă $f: [-2, -1] \rightarrow [-4, -3]$, astfel încât $\int_{-2}^{-1} f^2(x) dx = \frac{3}{4}$. Să se demonstreze că:
- a) $[f(x) + 4] \cdot [f(x) + 3] \leq 0, (\forall) x \in [-2, -1]$.
- b) $\frac{-49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2, -1]$.
- c) $28 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x) dx \in [-52, -51]$.
4. Trei tractoare A, B și C ar ara un teren în 7 ore, arând împreună. După ce au arat împreună timp de 5 ore, se defectează tractorul C iar cele două tractoare rămase ar termina de arat restul terenului în 4 ore. După 2 ore de la defectarea tractorului C, tractorul B este folosit la o altă lucrare, rămânând tractorul A care termină de arat terenul încă în 6 ore. În câte ore ar termina de arat terenul fiecare dintre tractoarele A, B, și C dacă ar ara singure?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.