INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. a) Suprafața unui nufăr se dublează în fiecare zi. După 40 de zile nufărul acoperă tot lacul. După câte zile nufărul acoperă jumătate din suprafața lacului ?
b) Există trei numere reale a,b,c care să fie simultan în progresie aritmetică și în progresie geometrică ?

Soluţie.
a) Notăm u – suprafața inițială a nufărului 1p
Suprafața nufărului după prima zi este $2u$ 1p
Suprafața nufărului după a 40-a zi este $2^{40}u$ 1p
Nufărul acoperă jumătate din suprafața lacului după 39 de zile 1p
b) Fie numerele a,b,c în progresie aritmetică $\Rightarrow a, a+r, a+2r$ 0,5p
a,b,c în progresie geometrică $\Rightarrow a, qa, q^2a$ 0,5p
Pune condiția $\begin{cases} a+r=qa \\ a+2r=q^2a \end{cases}$ 1p
Finalizare, $r=0, q=1, a=b=c$ 1p

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-2x+m, m\in\mathbb{R}^*$.
a) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox.
b) Pentru ce valori reale ale lui m graficul funcției f este situat deasupra axei Ox ? Dar sub axa Ox ?
c) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care dreapta de ecuație $y=2x+3$ intersectează graficul funcției f într-un singur punct.

Soluţie.
a) $G_f \cap Ox \neq \Phi \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow 4-4m^2 \geq 0$ 1p
$4-4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4(1-m)(1+m) \geq 0 \Rightarrow m\in[-1,1]$ 1p
b) Graficul funcției este situat deasupra axei $Ox \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ 0,5p
$\Rightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \end{cases} \Rightarrow m\in(1,+\infty)$ 1p
Graficul funcției este situat sub axa $Ox \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ 0,5p

$\Rightarrow \begin{cases} m<0 \\ m \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty,-1)$ 1p

c) Sistemul $\begin{cases} y = 2x+3 \\ y = mx^2-2x+m \end{cases}$ trebuie să aibă soluție unică $\Leftrightarrow mx^2-4x+m-3=0$ are soluție unică

.... 1p

$\Delta = 0 \Rightarrow 16-4m(m-3)=0 \Leftrightarrow 4-m^2+3m=0 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0 \Rightarrow m \in \{-1,4\}$ 1p

3. La o fabrică de conserve s-a pierdut 6% din cantitatea de fructe după prima sortare, iar după a doua sortare s-a pierdut 2% din cantitatea rămasă după prima sortare. În final au rămas 184,24 tone de fructe. 12,5% din cantitatea bună de prelucrat se folosește pentru dulceață și cu 500% mai mult pentru gem.

a) Care este cantitatea de fructe destinată sortării ?

b) Ce cantitate de fructe rămâne după prepararea dulceței și a gemului ?

Soluţie.

Fie x cantitatea inițială de fructe.

a) După prima sortare rămân $\frac{94}{100}x$ 1p

După a doua sortare rămân $\frac{98}{100}\cdot\frac{94}{100}x$ 1p

$\frac{98}{100}\cdot\frac{94}{100}x = 184,24$ tone $\Rightarrow x = 200$ tone 2p

b) Pentru dulceață se folosesc $\frac{12,5}{100}\cdot 184,24 = 23,03$ tone fructe 1p

Pentru gem se folosesc $23,03+5\cdot 23,03 = 138,18$ tone fructe 1p

Cantitatea rămasă este $23,03$ tone fructe 1p

4. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g(x)=-2x+4$. Să se calculeze cosinusul unghiului format de graficele celor două funcții.

Soluţie.

$G_f \cap G_g = \{A\}, \begin{cases} y = x+1 \\ y=-2x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, A(1,2)$ 1p

$G_f \cap Ox = \{B\}, \begin{cases} y = 0 \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}, B(-1,0)$ 1p

$G_g \cap Ox = \{C\}, \begin{cases} y = 0 \\ y=-2x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}, C(2,0)$ 1p

În triunghiul ABC: $AB=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}, \quad AC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}, \quad BC=\sqrt{3^2+0^2}=3$ 2p

Aplicăm teorema cosinusului în $\Delta ABC, \varphi = \sphericalangle BAC$:

$\cos\varphi = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{8+5-9}{2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}} = \frac{4}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 2p