INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Un pătrat are două laturii de ecuaţii: $x+5y-17=0$ și $5x-y-7=0$ și o diagonală de ecuație $3x+2y+1=0$.

a) Să se determine coordonatele vârfurilor pătratului.
b) Să se scrie ecuațiile celorlalte două laturi.
c) Să se calculeze aria pătratului.

Soluţie.

a) Fie $d_1: x+5y-17=0, d_2: 5x-y-7=0, d_1 \cap d_2 = \{A\} \Rightarrow A(2,3)$ 1p
Fie $d: 3x+2y+1=0, d \cap d_1 = \{B\} \Rightarrow B(-3,4)$ 1p
$d \cap d_2 = \{D\} \Rightarrow D(1,-2)$ 1p
$[AC],[BD]$ au același mijloc $M(-1,1)$ 1p
obținem $C(-4,-1)$ 1p
b) $BC: 5x-y+19=0$ 0,5p
$DC: x+5y+9=0$ 0,5p
c) Determinăm lungimea laturii $AB=\sqrt{26}$ 0,5p
Calculăm aria $\mathcal{A}=26$ 0,5p

2. Considerăm dezvoltarea $\left(\sqrt{y}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$, unde $y \in \mathbb{R}, y>0, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați n pentru care coeficienții termenilor de rang 1, 2 respectiv 3 ai dezvoltării formează o progresie aritmetică.
b) Pentru $n=8$ găsiți termenii dezvoltării în care exponentul lui y să fie număr natural.

Soluţie.

a) $T_{k+1} = C_n^k \left(\sqrt{y}\right)^{n-k} \left(\dfrac{1}{2y^{\frac{1}{4}}}\right)^k = C_n^k y^{\frac{n-k}{2}-\frac{k}{4}} \cdot \dfrac{1}{2^k}$

Coeficienții primilor trei termeni sunt: $C_n^0 = 1;\ C_n^1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{2};\ C_n^2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{n(n-1)}{8}$ 2p

Condiția de progresie aritmetica este: $2 \cdot \dfrac{n}{2} = 1 + \dfrac{n(n-1)}{8} \Leftrightarrow$ 1p

$\Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \Leftrightarrow n = 1$ (nu convine) sau $n = 8$. 1p

b) $T_{k+1} = C_8^k \left(\sqrt{y}\right)^{8-k} \left(\dfrac{1}{2y^{\frac{1}{4}}}\right)^k = C_8^k y^{\frac{8-k}{2}} \cdot \dfrac{1}{2^k} \cdot y^{-\frac{k}{4}} = C_8^k \cdot \dfrac{1}{2^k} \cdot y^{\frac{16-3k}{4}}$ 1p

$\dfrac{16-3k}{4} \in \mathbb{N}, \quad 0 \le k \le 8, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{0,4\}$ iar termenii T_1, T_5 .... 2p

3. Trei muncitori realizează împreună 2064 de piese. Primul muncitor realizează 140% din cantitatea pe care o realizează al doilea muncitor, iar 60% din cât realizează al doilea muncitor este cu 15% mai mult decât 25% din cât realizează al treilea muncitor. Câte piese are de realizat fiecare muncitor ?

Soluție.

Notăm a, b, c numărul de piese realizat de primul, al doilea respectiv al treilea muncitor.

$a + b + c = 2064$ 1p

$a = \dfrac{140}{100} b$ 1p

$\dfrac{60}{100} b = \dfrac{15}{100} \cdot \dfrac{25}{100} c + \dfrac{25}{100} c$ 2p

$a = \dfrac{7}{5} b; c = \dfrac{48}{23} b \Rightarrow \dfrac{7}{5} b + b + \dfrac{48}{23} b = 2064$ 1p

$a = 644, b = 460, c = 960$ 2p

4. Să se rezolve pe domeniul maxim de definiție ecuațiile:

a) $\log_3\left(\log_4\left(x^2 - 17\right)\right) = 1$

b) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

Soluție.

a) Condițiile de existență $\begin{cases} x^2 - 17 > 0 \\ \log_4\left(x^2 - 17\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow x^2 - 17 > 1 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -3\sqrt{2}\right) \cup \left(3\sqrt{2}, +\infty\right)$ 1p

Ecuația este echivalentă cu $x^2 - 17 = 64 \Rightarrow x = \pm 9$ 1p

$-9, 9 \in \left(-\infty, -3\sqrt{2}\right) \cup \left(3\sqrt{2}, +\infty\right)$ 1p

a) Aducem ecuația la forma $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ 1p

Notăm $3^x = t, t > 0$ 0,5p

Rezolvăm ecuația $t^2 - 10t + 9 = 0$ 0,5p

Soluțiile $x = 0$ sau $x = 2$ 1p