INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Filologie / Științe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie X o matrice pătratică de ordinul al doilea, cu elemente numere reale, care verifică ecuația $X^2 + X - A = O_2$, unde $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $X = A$ verifică ecuația din enunț.

b) Arătați că $(2X + I_2)^2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

c) Determinați toate soluțiile ecuației din enunț.

Soluție.

a) $X^2 = O_2$ 2p

Finalizare 1p

b) $X^2 + X = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 4X^2 + 4X = \begin{pmatrix} -8 & -16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4X^2 + 4X + I_2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (2X + I_2)^2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ 2p

c) Notăm $2X + I_2 = Y$, de unde $Y^2 = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. Căutăm $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 1p

$Y = \begin{pmatrix} \pm 3 & \pm 8 \\ \mp 2 & \mp 5 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 1p

2. Într-un sistem de axe carteziene xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,2)$ și $B_n\left(\frac{2n}{n^2+1}, \frac{n^2-1}{n^2+1}\right), n \in \mathbb{Z}$.

a) Determinați aria triunghiului OAB_1.

b) Determinați ecuația dreptei AB_{-1}.

c) Pot fi coliniare punctele B_0, B_1, B_n? Justificați răspunsul!

Soluție.

a) Aria este 1 .... 2p

b)Ecuația dreptei este $2x - 3y + 2 = 0$ 2p

c) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{2n}{n^2+1} & \frac{n^2-1}{n^2+1} & 1 \end{vmatrix} = \frac{2n^2-2n}{n^2+1}$ 1p

$\frac{2n(n-1)}{n^2+1} \neq 0$, pentru orice n număr întreg, $n \neq 0$, $n \neq 1$ 1p

Punctele B_0, B_1, B_n nu sunt coliniare 1p

3. Pe mulțimea numerelor reale considerăm legea de compoziție asociativă "$\circ$" definită prin $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$, pentru orice x, y numere reale.

a) Determinați elementul neutru al acestei legi.

b) Arătați că $\underbrace{x \circ x \circ ... x}_{2016} = (x-6)^{2016} + 6$.

c) Determinați numerele reale x care verifică ecuația $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2016} = x^2 - 12x + 42$.

Soluție.

a) Dacă notăm cu e elementul neutru, atunci avem $x \circ e = x$, pentru orice x număr real.
Obținem $e = 7$ 2p
Verificăm că $7 \circ x = x$, pentru orice x număr real 1p
b) Demonstrăm prin inducție matematică $\underbrace{x \circ x \circ ... x}_{n} = (x-6)^n + 6$, pentru orice număr întreg n,

$n \geq 2$ 2p
c) De la punctul b) avem $\underbrace{x \circ x \circ ... x}_{2016} = (x-6)^{2016} + 6$. Obținem $(x-6)^{2016} = (x-6)^2$ 1p

de unde $x_1 = 6$, $x_2 = 7$ și $x_3 = 5$ 1p

4. Printre elementele unei matrice cu 4 linii și 4 coloane există 4 litere, astfel încât se află o singură literă pe fiecare linie, pe fiecare coloană și pe fiecare dintre cele două diagonale. Câte soluții există, dacă cele 4 litere sunt identice? Dar dacă sunt diferite? Justificați răspunsul!

Soluție.

Cu litere identice, plasăm o literă pe diagonala principală a matricei. Din cele 4 elemente de pe diagonala secundară, unul este pe aceeași coloană iar altul este pe aceeași linie cu litera plasata pe diagonal principala. A doua literă poate fi plasată în locul unuia dintre celelalte două elemente. 2p
Observăm că ultimele 2 litere pot fi plasate ,de exemplu,cum este arătat mai jos:

$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & a \\ * & a & * & * \end{pmatrix}$ 1p

Din moment ce prima literă poate fi unul din oricare cele 4 elemente de pe diagonala principală și a doua oricare dintre cele 2 elemente de pe diagonala secundară, există $4 \cdot 2 = 8$ soluții 2p
4 litere diferite duc la aceleași 8 alegeri de elemente, dar pentru oricare alegere există $P_4 = 24$ moduri pentru a pune literele. Deci există $8 \cdot 24 = 192$ soluții. 2p