MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. Se consideră x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + (1-a) \cdot x - a = 0$, iar x_3, x_4 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + (a-3) \cdot x - 3a = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine rădăcinile x_1, x_2.

b) Să se determine valorile lui a pentru care ecuaţiile date au o rădăcină comună.

c) Să se demonstreze că $x_1^{2017} + x_2^{2017} + x_3^{2017} + x_4^{2017}$ este un număr natural par, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Obţine $x_1 = a, x_2 = -1$, sau invers...**2 p**

b) Obţine $x_3 = -a, x_4 = 3$, sau invers...**1 p**

Ecuaţiile au o rădăcină comună dacă $x_1 = x_4$ sau $x_2 = x_3$ sau $x_1 = x_3$.....................................**1 p**

Finalizare $a \in \{0,1,3\}$...**1 p**

c) Obţine $x_1^{2017} + x_2^{2017} + x_3^{2017} + x_4^{2017} = 3^{2017} - 1$.....................................**1 p**

Finalizare $x_1^{2017} + x_2^{2017} + x_3^{2017} + x_4^{2017} = 3^{2017} - 1$, care este număr natural par...........................**1 p**

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC în care măsurile unghiurilor aparţin intervalului $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Determinaţi perimetrul triunghiului ABC, $m(\sphericalangle A) = \frac{\pi}{2}$, ştiind că aria triunghiului este egală cu $24\ \text{cm}^2$şi lungimile laturilor sunt numere în progresie aritmetică.

b) Să se demonstreze că $\sin^2 B + \sin^2 C = 1 \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) = \frac{\pi}{2}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Fie $c_1 \le c_2 < ip$ lungimile laturilor triunghiului dreptunghic.

Atunci $c_1 \cdot c_2 = 48$ şi $c_1 + ip = 2c_2$...**1 p**

Din $ip^2 = c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow (2c_2 - 1)^2 = c_1^2 + c_2^2$, obţinem că $3c_2 = 4c_1$.....................................**1 p**

Obţine $c_1 = 6, c_2 = 8, ip = 10$ şi $P_{ABC} = 24$ cm...**1 p**

b) Demonstrăm $\Leftarrow$

Dacă $m(\sphericalangle A) = \frac{\pi}{2}$, rezultă că $\sin^2 B + \sin^2 C = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$,.....................................**2 p**

Demonstrăm $\Rightarrow$

Folosind formula $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$, relaţia $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$ devine

$\frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 2B + \cos 2C = 0$.....................................**1 p**

Din $2\cos(B+C)\cos(B-C) = 0, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, se obţine $B + C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) = \frac{\pi}{2}$.....................**1 p**

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Se numeşte $n - special$, un număr de forma $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, unde cifrele $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{1, 2, 3\}$ şi pentru orice cifră a_k, cel puţin una dintre perechile (a_{k-1}, a_k) sau (a_k, a_{k+1}) să fie formată din numere consecutive. De exemplu: 121 este număr $3 - special$; 3221 este număr $4 - special$, dar 122 nu este număr $3 - special$.

a) Justificaţi câte numere $3 - speciale$ există?

b) Determinaţi toate numerele $4 - speciale$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Într-un număr $3 - special$ nu putem avea două cifre consecutive identice (scris explicit sau folosit impicit în numărare)………………………………………………………………**1 p**

Obţine următoarele numere $3 - speciale$ $121, 123, 212, 232, 321, 323$………………**2 p**

b) Vom obţine numere $4 - speciale$ atât din numere $3 - speciale$, cât şi din numere care nu sunt $3 - speciale$.

Din numerele $3 - speciale$ se obţin următoarele: $1212, 1232, 2121, 2123, 2132, 2312, 2321, 2323, 3212, 3232$, ………………**2 p**

Mai putem obţine următoarele numere $4 - speciale$: $1221, 1223, 2112, 2332, 3221, 3223$………….**2 p**

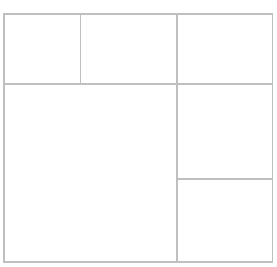
Problema 4.

a) Justificaţi cum poate fi împarţită complet o foaie pătratică de tablă având lungimea laturii egală cu l, în n suprafeţe pătratice (nu toate având aceeaşi lungime a laturii) , unde $n \in \{6,7\}$.

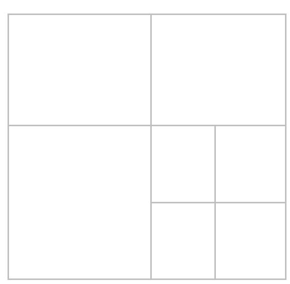
b) Ştiind că o suprafaţă pătratică de tablă având lungimea laturii egală cu $l \in \mathbb{N}$ a fost împarţită complet în 13 suprafeţe pătratice, dintre care 12 au lungimea laturii egală cu 1 şi cealaltă are lungimea laturii egală cu $x \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, să se determine l.

BAREM DE CORECTURĂ

a)



Pentru $n = 6$



Pentru $n = 7$

………………………………**4 p**

b) Folosind ariile, se obţine $l^2 = 12 + x^2$……………………………………**1 p**

Obţine $(l - x)(l + x) = 12$……………………………………**1 p**

Finalizare $l = 4$……………………………………**1 p**

__Notă:__ Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.