MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. În sistemul de axe ortogonale (xOy) se consideră punctele $A(-2,3), B(4,6)$ şi dreapta $d: x+y=6$.

a) Determinaţi coordonatele unui punct $C \in d$, astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel, cu baza AB.

b) Determinaţi un punct $D \in d$, având coordonatele numere naturale, astfel încât aria triunghiului ABD să fie un număr natural minim.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Dacă $C \in d \Rightarrow C(a, 6-a)$ ....**1 p**

Din $CA = CB$, rezultă că $\sqrt{(a+2)^2+(3-a)^2} = \sqrt{(a-4)^2+(-a)^2}$ şi $a = \frac{1}{2}$, deci $C\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$....................**1 p**

b) La fel $D(a, 6-a), a \in \mathbb{R}$...**1 p**

Obține ecuația $AB: x-2y+8=0$ și lungimea $AB = 3\sqrt{5}$...**1 p**

Dacă $DE \perp AB$, atunci $DE = \frac{|a-2(6-a)+8|}{\sqrt{5}} = \frac{|3a-4|}{\sqrt{5}}$...**1 p**

Aria triunghiului va fi $A_{ABD} = \frac{3|3a-4|}{2}$...**1 p**

Aria va fi număr natural minim dacă $|3a-4| = 2$, deci $a = 2$, iar $D(2,4)$..............................**1 p**

Problema 2. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4^x - m \cdot 2^x + 1, m \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $m = 2{,}5$, rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât soluţia inecuaţiei $f(x) \leq 0$ să fie un interval mărginit de lungime 1.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Notăm $2^x = y$ şi obţinem $2y^2 - 5y + 2 = 0$..**1 p**

Obținem că $y \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$, deci $x \in \{-1, 1\}$...**1 p**

b) Dacă $2^x = y$, inecuația devine $y^2 - my + 1 \leq 0$..**1 p**

Se impune condiția $\Delta = m^2 - 4 > 0$...**1 p**

Dacă y_1, y_2 sunt soluțiile ecuației $f(x) = 0$, atunci din $|y_1 - y_2| = 1$ se obține

$(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2 = 1$ ....**2 p**

Obținem $m \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$...**1 p**

Problema 3.

a) Arătaţi că $\log_2(1+\sqrt{3}) \in (1,2)$.

b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $2^x - 2^{1-x} \leq 2$.

c) Arătaţi că există un singur număr natural care să fie soluţie a ecuaţiei $2 - x^2 = 2^x - 2^{1-x}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $1 < \log_2(1+\sqrt{3}) < 2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{3} < 3$..**1 p**

b) Dacă $2^x = y > 0$, rezultă că $y^2 - 2y - 2 \leq 0$ ....**1 p**

Găsim $y \in [1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}]$ și $x \in (-\infty, \log_2(1+\sqrt{3}))$ ....**1 p**

c) Observăm că $2 - x^2 \leq 2, (\forall)x \in \mathbb{R}$ ....**1 p**

Deducem că $2^x - 2^{1-x} \leq 2$ si $x \in (-\infty, \log_2(1+\sqrt{3}))$..**1 p**

Dacă $x \in \mathbb{N}$, conform punctului **a)** , deducem că $x \in \{0, 1\}$..**1 p**

Prin verificare, deducem că $x = 1$ este singura soluție..**1 p**

Problema 4. Preţul unui obiect creşte cu 60%, iar noul preţ creşte cu $p\%$, unde $p \in \mathbb{N}, p \leq 25$. Ultimul preţ se micşorează cu $q\%$, $q \in \mathbb{N}$, astfel încât preţul final să devină egal cu preţul iniţial al obiectului.

a) Arătaţi că $q = 100 - \frac{6250}{p+100}$.

b) Determinaţi valorile p şi q.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Dacă S este pretul inițial, atunci după mărirea precizată, prețul va fi $\frac{8S}{5}$..**1 p**

După mărirea cu $p\%$, prețul va fi $\frac{8S}{5} + \frac{p}{100} \cdot \frac{8S}{5} = \frac{2(p+100)S}{125}$..**1 p**

După reducerea cu $q\%$, prețul va fi $\frac{2(p+100)S}{125} - \frac{q}{100} \cdot \frac{2(p+100)S}{125} = \frac{(p+100)(100-q)}{6250}S$..**1 p**

Impunem condiția de egalitate obținând $\frac{(p+100)(100-q)}{6250}S = S$..**1 p**

Deducem că $q = 100 - \frac{6250}{p+100}$..**1 p**

b) Din $q \in \mathbb{N}$, rezultă că $(p+100)|6250$ și cum $100 < p + 100 \leq 125$..**1 p**

Se obține $p = 25$ și $q = 50$..**1 p**

<u>Notă</u>: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*