MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ 20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. Notăm cu $\Delta(a,b,c)$ determinatul matricei $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2a & 2b & 2c\\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\Delta(0,1,-1)$.

b) Determinați numerele reale x, pentru care matricea $A(0,1,x)$ are rangul egal cu 2.

c) Demonstrați că, dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi și $\Delta(a,b,c)=0$, atunci, triunghiul este isoscel.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\Delta(0,1,-1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=12$……………………………………………………**1 p**

b) $A(0,1,x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2x\\ 0 & 3 & 3x^2\end{pmatrix}$

$\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang}(A)\geq 2$……………………………………………………**1 p**

Pentru ca $\operatorname{rang}(A)=2$ este necesar ca $\Delta(0,1,x)=0$……………………………………**1 p**

$\Delta(0,1,x)=\begin{vmatrix}2 & 2x\\ 3 & 3x^2\end{vmatrix}=6x(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=1\end{cases}$……………………………………**1 p**

c) $\Delta(a,b,c)=6\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}\overset{(C_2-C_1)\to C_2}{\underset{(C_3-C_1)\to C_3}{=\!=\!=\!=}}6\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}=$

$=6\cdot(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ a+b & a+c\end{vmatrix}=6(b-a)(c-a)(c-b)=0$…………………………**2 p**

Rezultă că $a=b$ sau $a=c$ sau $b=c$. Așadar, triunghiul este isoscel……………………………**1 p**

Problema 2. Fie a,b,c numere reale strict pozitive și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a\cdot x+\sqrt{b\cdot x^2+cx+1}$.

a) Determinați a,b,c, știind că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=4$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{4}$.

b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+\sqrt{4\cdot x^2+x+1}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\sqrt{b+\frac{c}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}=a+\sqrt{b}$……………………………………………………**1 p**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{bx^2-cx+1}-ax\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(b^2-a^2)x^2-cx+1}{\sqrt{bx^2-cx+1}+ax}$ .... **1 p**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} b-a^2=0 \\ \frac{-c}{a+\sqrt{b}} = -\frac{1}{4}\end{cases}$ .... **1 p**

Din $\begin{cases} a+\sqrt{b}=4 \\ b-a^2=0 \\ \frac{-c}{a+\sqrt{b}} = -\frac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=1\end{cases}$ .... **0,5 p**

b) $f(x) = 2x+\sqrt{4\cdot x^2+x+1}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și ca urmare, nu are asimptote verticale................ **0,5 p**

$m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 4, n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-4x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x} = \frac{1}{4}$.......... **1 p**

Așadar, dreapta de ecuație: $y = 4x+\frac{1}{4}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.. **1 p**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+1}-2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x} = -\frac{1}{4}$.

Așadar, dreapta de ecuație: $y = -\frac{1}{4}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.. **1 p**

Problema 3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+1}$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$.

a) Să se determine a și b știind că $f(-1) = 2$ și tangenta la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 1$ este paralelă cu axa (Ox).

b) Pentru funcția determinată la **a)** să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 3$.

c) Să se demonstreze că funcția determinată la **a)** este mărginită.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $f(-1) = 2 \Rightarrow -a+b = 3$ .... **1 p**

$f'(x) = \frac{-ax^2+2(1-b)x+a}{(x^2+1)^2}$ .... **1 p**

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow b = 1$, și obținem $a = -2$, deci $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$, x$\in\mathbb{R}$ .... **2 p**

b) $A(3,\frac{2}{5})$, $f'(3) = \frac{4}{25}$, ecuația tangentei este $y-\frac{2}{5} = \frac{4}{25}(x-3) \Leftrightarrow 4x-25y-2 = 0$ .... **1 p**

c) $f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + + + + +		0	- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + + + +	
$f(x)$	1	↗	2	↘	0	↗	1

Tabelul de variație al funcției.. **1 p**

Din tabel, rezultă că $0 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. .... **1 p**

Problema 4. Se consideră matricea $A \in M_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ m & -2 & 0 \\ 1 & -1 & m\end{pmatrix}$.

a) Pentru ce valori complexe ale lui m matricea A este inversabilă?

b) Pentru $m = 2$, să se determine inversa matricei A.

c) Să se demonstreze că, dacă $m = 0$, atunci $A^k \neq O_3$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\det(A) = -m^3 - m + 2$.. **1 p**

Matricea A este inversabilă dacă $\det(A) \neq 0$.

$\det(A) = 0 \Rightarrow m^3 + m - 2 \Rightarrow (m-1)(m^2 + m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$..**1 p**

A este inversabilă dacă $m \notin \{m_1, m_2, m_3\}$...**1 p**

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -8 \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă...**1 p**

$A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$...**1 p**

c) Pentru $m = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, care este inversabilă, întrucât $\det(A) = 2$................................**1 p**

Presupunând, prin reducere la absurd, că $A^k = O_3$, din $\det(A^k) = (\det(A))^k$, ar rezulta că $\det(A) = 0$(fals)...**1 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*