MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. Pe mulțimea numerelor reale, se definește legea de compoziție „$\circ$" astfel:

$x \circ y = 4(x+1)(y+1) - 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că legea de compoziție este asociativă și determinați elementul neutru.

b) Calculați $-\frac{2017}{1008} \circ \left(-\frac{2016}{1008}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{1}{1008}\right)$.

c) Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „$\circ$".

BAREM DE CORECTURĂ

a) Demonstrează asociativitatea ……………………………………………………………………....**1 p**

Elementul neutru $e = -\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$ ………………………………………………………………….**1 p**

b) Avem $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1, \forall x \in \mathbb{R}$ ………………………………………………....**1 p**

În compunere există $-\frac{1008}{1008} = -1$, deci compunerea celor 2017 elemente este -1……………………….**1 p**

c) Se găsește $x' = -\frac{16x+15}{16(x+1)}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ …………………………………………………...**2 p**

Din $x' = x \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{4};\ x_2 = -\frac{3}{4}$ ……………………………………………………….**1 p**

Problema 2. Se consideră polinomul $f = mX^5 + nX + p,\ \ m, n, p \in \mathbb{Z}$.

a) Să se demonstreze că $f(3) - f(-1)$ este multiplu de 4.

b) Să se demonstreze că, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$, numărul $f(a) - f(b)$ este divizibil cu $a - b$.

c) Să se determine coeficienții polinomului f știind că $f(-1) = 4$ și $f(n) = 5$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $f(3) - f(-1) = 4(61m + n) \vdots 4$ ……………………………………………………......**1 p**

b) $f(a) - f(b) = (a-b)[m(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + n] \Rightarrow f(a) - f(b) \vdots (a-b)$ ……….......**2 p**

c) $f(n) - f(-1) = 1$și $(n+1) | (f(n) - f(-1)) \Rightarrow (n+1)|1 \Rightarrow n \in \{0, -2\}$ ……………..…………....**2 p**

Dacă $n = 0 \Rightarrow f = mX^5 + p, f(-1) = 4, f(0) = 5 \Rightarrow -m + p = 4, p = 5 \Rightarrow m = 1 \in \mathbb{Z}$.

Deci $f = X^5 + 5$ ……………………………………………………………………………...**1 p**

Dacă $n=-2 \Rightarrow f=mX^5-2X+p$

$f(-1)=4 \Leftrightarrow -m+p=2$, $\quad f(-2)=5 \Leftrightarrow -32m+p=1$

Obținem sistemul

$\begin{cases}-m+p=2\\-32m+p=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p=1+32m\\m+1+32m=2\end{cases} \Rightarrow 31m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{31} \notin \mathbb{Z}$, așadar, în acest caz, nu există polinomul f care să satisfacă condițiile date………………………………………………………………**1 p**

Problema 3. Fie funcția $f:[1,e] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$.

a) Calculați $\int_0^1 f(e^{x^2})dx$.

b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei (Ox).

c) Să se demonstreze că $\int_1^e xf(x)dx+\int_0^1 e^{x^2}dx=e$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\int_0^1 f(e^{x^2})dx=\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}}dx=$ ……………………………………………………**1 p**

$=-\frac{1}{2}\int_0^1 (e^{-x^2})'dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2e}$ ……………………………………………………**1 p**

b) $V=\pi\int_1^e f^2(x)dx=\pi\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

$\ln x=t \Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt, x=e^t \Rightarrow V=\pi\int_0^1 te^{-t}dt$ ……………………………………………**1 p**

Finalizare $V=\pi\left(1-\frac{2}{e}\right)$ ……………………………………………………………………**1 p**

c) Schimbăm variabila prin $\sqrt{\ln x}=t \Rightarrow x=e^{t^2}, dx=2te^{t^2}dt$……………………………**1 p**

$\int_1^e xf(x)dx=\int_1^e \sqrt{\ln x}\,dx=\int_0^1 2t^2e^{t^2}dt$ ……………………………………………**1 p**

Integrala va fi $\int_0^1 t\left(e^{t^2}\right)'dt=e-\int_0^1 e^{t^2}dt=e-\int_0^1 e^{x^2}dx$

Finalizare ………………………………………………………………………………………**1 p**

Problema 4. Pe mulțimea numerelor reale, definim legea de compoziție „$*$” prin $x*y=\sqrt[3]{x\cdot y}$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați că legea „$*$” nu este asociativă.

b) Fie $H=\{-1,0,1\}$. Demonstrați că H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$” și că operația indusă de legea „$*$” pe H este asociativă.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Este suficient un contraexemplu.

$(1*2)*3=\sqrt[3]{2}*3=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{27}}=\sqrt[9]{54}$

$1*(2*3)=1*\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{6}}=\sqrt[9]{6} \Rightarrow$ legea „$*$” nu este asociativă……………………………**2 p**

b) Tabla legii de compoziție, relativ la mulțimea H(legea notată prin „$\circ$”) este:

$\circ$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Așadar, H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „ $*$ ”…………………………………**2 p**

Observăm că $(\forall)x\in H$, avem $\sqrt[3]{x}=x$……………………………………………………………**1 p**

Fie $(\forall)a,b,c\in H$. Avem $\begin{cases}a\circ(b\circ c)=a\circ\sqrt[3]{bc}=a\circ(bc)=\sqrt[3]{abc}=\underline{abc}\\(a\circ b)\circ c=\sqrt[3]{ab}\circ c=(ab)\circ c=\sqrt[3]{abc}=\underline{abc}\end{cases}$…………………………**2 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*