MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

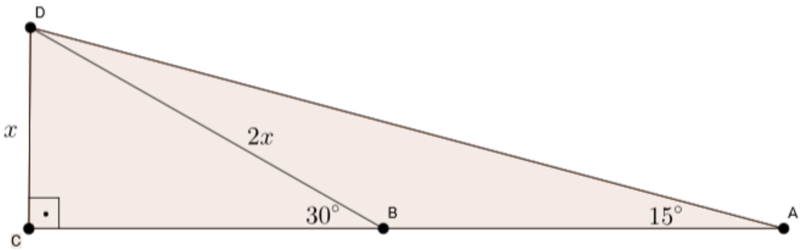
Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX–a

Problema 1. Un topograf observă că dintr-un punct A de la nivelul solului, o clădire se vede sub un unghi de $15°$. Apropiindu-se cu 20 m de clădire, în linie dreaptă, unghiul de observare a clădirii este de $30°$. Ce înălțime are clădirea?

BAREM DE CORECTURĂ



Figură corectă..**1 p**

Fie $CD = x$ metri, înălțimea clădirii.

$\Delta BCD -$ dreptunghic $\Rightarrow BD = 2x$ şi $BC = x\sqrt{3}$..........**1 p**

$\Delta ACD: AC = 20 + x\sqrt{3}$

tg $15° = \frac{CD}{AC} = \frac{x}{20+x\sqrt{3}}$ ....**1 p**

tg $15° =$ tg $(45° - 30°) = 2 - \sqrt{3}$ ....**2 p**

Obținem $\frac{x}{20+x\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x = 10$ metri..........**2 p**

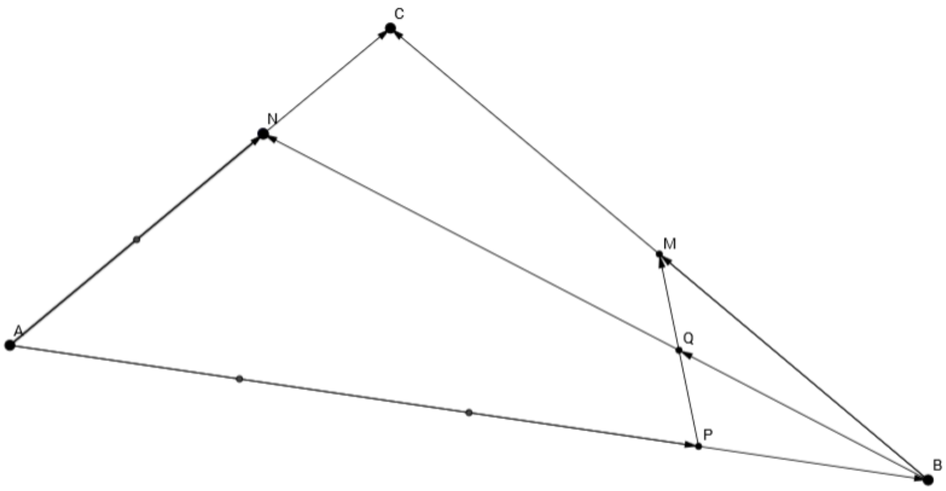
Problema 2. Se dă triunghiul (ABC), punctele M, N, P pe laturile acestuia, astfel încât $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN} = 2 \cdot \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AP} = 3 \cdot \overrightarrow{PB}$ și Q mijlocul segmentului $[PM]$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)$ și $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{8} \cdot \left(2 \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)$.

b) Demonstrați că punctele B, Q, N sunt coliniare și calculați valoarea raportului $\frac{BQ}{QN}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a)



Figură corectă........................**1 p**

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)$ ....**1 p**

$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BP}\right) = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{8} \cdot \left(2 \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)$ ....**1 p**

b) Din egalitățile de la **a)** deducem că $\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{BN}$..**1 p**

Așadar, punctele B, Q, N sunt coliniare...**1 p**

Din $\frac{BQ}{QN} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{BN}{BQ} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{BQ}{QN} = \frac{3}{5}$..**2 p**

Problema 3. Se consideră familia de funcții $f_m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = m \cdot x^2 + 2(m+1)x + m - 1, m \in \mathbb{R}^*$.

a) Pentru $m = -1$, să se studieze monotonia funcției și să se determine valoarea extremă a acesteia.

b) Să se demonstreze că vârfurile parabolelor associate acestor funcții se află pe dreapta $(d): y = x - 2$.

c) Demonstrați că toate parabolele associate acestor funcții trec printr-un punct fix. Verificați rezultatul obținut.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $f_1(x) = -x^2 - 2$. Vârful parabolei asociate funcției este $V_{-1}(0, -2)$...**1 p**

Funcția admite maxim. $f_{max} = f_{-1}(0) = -2$..**1 p**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_{-1}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$+\infty$

Funcția este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$..**1 p**

b) Vârfurile parabolelor asociate funcțiilor f_m sunt $V_m(x_V, y_V) = V_m\left(-\frac{m+1}{m}, -\frac{3m+1}{m}\right)$............................**1 p**

Verificare. $y_V = x_V - 2 \Leftrightarrow -\frac{3m+1}{m} = -\frac{m+1}{m} - 2$(adevărat)..**1 p**

c) Fie $M_0(a, b)$ punctul fix.

Este necesar să avem $m \cdot a^2 + 2(m+1) \cdot a + m - 1 = b, (\forall) m \in \mathbb{R}^*$.

Rezultă că $m \cdot (a+1)^2 + 2a - b - 1 = 0, (\forall) m \in \mathbb{R}^*$

Obținem $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ 2a - b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow M_0(-1, -3)$..**1 p**

Verificare. $f_m(-1) = m - 2 \cdot (m+1) + m - 1 = -3$..**1 p**

Problema 4. a) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = 3n - 2$ este o progresie aritmetică. Determinați numărul natural n dacă $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 51$.

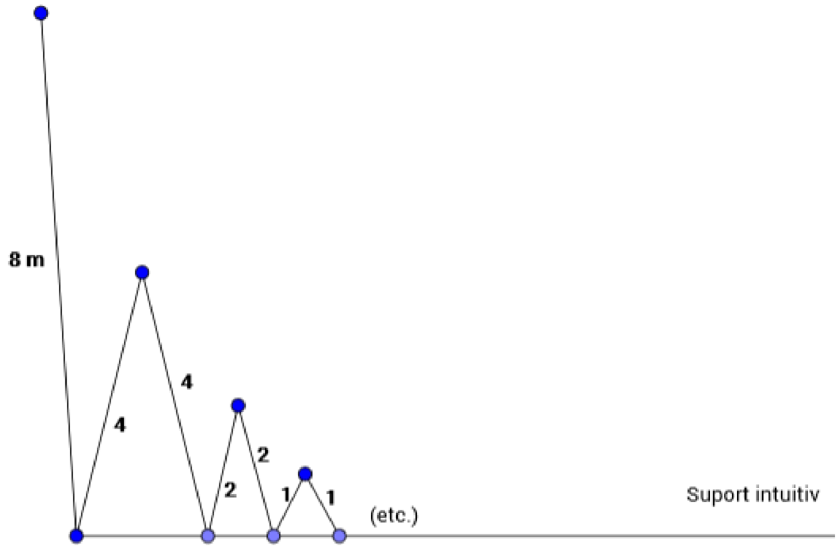
b) O minge cade de la înălțimea de 8 m. După fiecare cădere, mingea se ridică la jumătate din înălțimea de la care a căzut. Demonstrați că distanța parcursă de minge de la început și până când atinge pământul a zecea oară este mai mica decât 24 m.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $a_{n+1} - a_n = 3, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$, deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu rația $r = 3$ și primul termen $a_1 = 1$..**2 p**

$a_1 + a_2 + \cdots a_n = 51 \Rightarrow \frac{(3n-1)n}{2} = 51 \Rightarrow 3n^2 - n - 102 = 0 \Rightarrow n_1 = -\frac{17}{3}$(nu convine), $n_2 = 6$.....**2 p**

b)



....**1 p**

Distanța parcursă de minge (în metri) este

$8 + 2 \cdot \left(4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) =$

$= 8 + 2 \cdot (2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6}) =$

$= 8 + 2 \cdot 2^2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}} = 8 + 2^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^9}\right) = 24 - \frac{1}{2^5} < 24$..**2 p**

__Notă:__ Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.