MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ 20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman- Științe Sociale

Clasa a XII –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$.

b) Să se demonstreze că $\left(A(x)\right)^2=A((x+1)^2-1)$, pentru orice x număr real.

c) Să se determine inversa matricei $A(1)$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $A(1)=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 10 & -3\end{pmatrix}$..**1 p**

$A(-1)=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -10 & 5\end{pmatrix}$..**1 p**

$A(1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -10 & 5\end{pmatrix}=A(-1)$..**1 p**

b) $A(x)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}1+5[(x+1)^2-1] & -2[(x+1)^2-1]\\ 10[(x+1)^2-1] & 1-4[(x+1)^2-1]\end{pmatrix}=A((x+1)^2-1), x\in\mathbb{R}$......................**2 p**

c) $\det(A(1))=2\neq 0$, deci $A(1)$ este inversabilă și $\left(A(1)\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -10 & 6\end{pmatrix}$....................................**2 p**

Problema 2. Fie matricele $X(a)=\begin{pmatrix}1+4a & 6a\\ -2a & 1-3a\end{pmatrix}$, unde a este un număr real.

a) Calculați $\det[X(a)]$.

b) Arătați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$, pentru orice a,b numere reale.

c) Determinați numărul real nenul a astfel încât $[X(a)]^2=I_2$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\det[X(a)]=1+a$..**2 p**

b) $X(a)\cdot X(b)=\begin{pmatrix}1+4(a+b+ab) & 6(a+b+ab)\\ -2(a+b+ab) & 1-3(a+b+ab)\end{pmatrix}=X(a+b+ab)$..............................**2 p**

c) $[X(a)]^2=X(a)\cdot X(a)=X(a+a+a^2)=X(2a+a^2)=I_2\Rightarrow 2a+a^2=0, a\neq 0\Rightarrow a=-2$ ....**3 p**

Problema 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-5x+6$, și matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ f(a) & f(b) & f(c)\end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $\det A = (c - a)\,(c - b)\,(b - a)$.
b) Demonstrați că $\det A = \det B$.
c) Demonstrați că aria oricărui triunghi cu vârfurile pe graficul lui f și cu coordonate întregi este tot un număr întreg.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$
$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$..**2 p**

b) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-5a+6 & b^2-5b+6 & c^2-5c+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$
$= \det A$...**3 p**

c) $A = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2-5x_1+6 & 1 \\ x_2 & x_2^2-5x_2+6 & 1 \\ x_3 & x_3^2-5x_3+6 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\right|$...................................**1 p**
care este număr întreg deoarece dintre numerele x_1, x_2, x_3 cel puțin două au aceeași paritate..............**1 p**

Problema 4. Plecând de la matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Maria construiește noi matrice. Întâi schimbă semnele a trei elemente ale matricei A, apoi schimbă semnele a trei elemente ale matricei A sau ale oricărei matrice astfel obținută. Maria continuă acest procedeu de oricâte ori vrea. Notăm cu M mulțimea acestor matrice.
a) Demonstrați că M conține cel mult 512 matrice.
b) Pentru orice matrice $X \in M$, demonstrați că $|\det X|$ este număr natural, multiplu de 4 și cel mult egal cu 6.
c) Demonstrați că, pentru orice $X \in M, \det X \in \{-4, 0, 4\}$.
d) Arătați că matricea $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Matricele din M au forma $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$, unde $|a_i| = 1$...**1 p**
Sunt astfel de $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^9 = 512$ elemente...**1 p**

b) Fie $X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}, |a_i| = 1$..**1 p**
Rezultă $\det X = \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \Rightarrow |\det X| \le 6$, $|\det X|$ este număr natural............................**1 p**
Apoi, $\det X = \begin{vmatrix} a_1+a_7 & a_2+a_8 & a_3+a_9 \\ a_4+a_7 & a_5+a_8 & a_6+a_9 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$ și elementele liniilor 1 și 2 sunt divizibile cu 2
$(a_1+a_7) \in \{-2, 0, 2\}$, $(a_2+a_8) \in \{-2, 0, 2\}$. De aici, rezultă că $|\det X|$ este divizibil cu 4..............**1 p**

c) Cum $|\det X| \le 6$ și $|\det X| \vdots 4 \Rightarrow |\det X| \in \{-4, 0, 4\}$...**1 p**

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sunt din M..............................**1 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*