MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA NAŢIONALĂ
12 mai 2018

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX-a

Problema 1. a) Determinaţi numărul natural $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că împărţind 9917 la n^2+n obţinem câtul 28 şi restul cel mai mare posibil.

b) Daţi două exemple de numere raţionale pozitive x, care să nu fie numere naturale, astfel încât $\dfrac{x}{2x-3}$ să fie număr natural.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Conform Teoremei împărţirii cu rest, cel mai mare rest ce poate fi obţinut este n^2+n-1 ……………..**1p**

Înlocuind, obţinem $9917 = 28\left(n^2+n\right)+n^2+n-1$ ……………………………..……………………..**1p**

Se obţine $n^2+n-342=0$ …………………………………………………………….……………**1p**

Ţinând cont că $n \in \mathbb{N}^*$, se obţine $n=18$ ……………………………………...………...…….**1p**

b) Considerăm nişte valori naturale aleatorii pentru $\dfrac{x}{2x-3}$ ………………………….………………...….**1p**

De exemplu, pentru $x=\dfrac{9}{5}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ se obţine $\dfrac{x}{2x-3}=3$ şi pentru $x=\dfrac{12}{7}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ se obţine $\dfrac{x}{2x-3}=4$ ….........**2p**

NOTĂ: Orice alte exemple corecte se punctează conform baremului!

Problema 2. Demonstraţi următoarele inegalităţi:

a) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2, \left(\forall\right)a,b\in\left(0,\infty\right)$;

b) $22\leq\dfrac{\overline{ab}}{a}+\dfrac{\overline{ba}}{b}\leq\dfrac{262}{9}$, oricare ar fi cifrele nenule *a* şi *b*. În ce caz avem egalitate?

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$ …………………………………………………………………….…..**1p**

Obţine $\left(a-b\right)^2\geq 0,\left(\forall\right)a,b\in\left(0,\infty\right)$, cu egalitate pentru $a=b$ …………..…………………………**1p**

b) Obţine $\dfrac{\overline{ab}}{a}+\dfrac{\overline{ba}}{b}=20+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ ………………………………………………………………**1p**

Prima inegalitate devine $22\leq 20+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$, adevărată conform punctului anterior…….………………...**1p**

A doua inegalitate devine $20+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq\frac{262}{9}\Leftrightarrow 9a^2-82ab+9b^2\leq 0$ **1p**

Obţine $9a^2-82ab+9b^2\leq 0\Leftrightarrow(9a-b)(a-9b)\leq 0$ **1p**

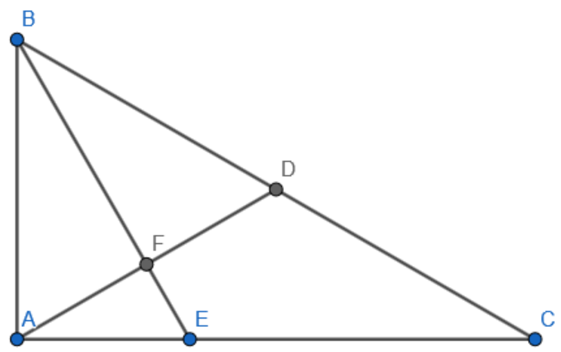
Deoarece $a,b\in\{1,2,...,9\}$, rezultă că $9a-b\geq 0$ şi $a-9b\leq 0$, egalitatea fiind adevărată pentru $\overline{ab}\in\{19,91\}$ **1p**

Problema 3. Se consideră triunghiul ΔABC în care $m(\measuredangle A)=90^\circ, m(\sphericalangle C)=30^\circ$, punctul D este mijlocul segmentului $[BC]$, iar punctul $E\in(AC)$ astfel încât $AC=3\cdot AE$. Să se demonstreze că:

a) ΔABD este echilateral;

b) $BE\perp AD$.

BAREM DE CORECTURĂ



a) Deoarece $[AD]$ este mediană în triunghiul dreptunghic ABC, rezultă că $AD=CD=BD$ **1p**

În triunghiul ADB avem : $DA=DB$ şi $m(\measuredangle B)=60^\circ$, deci ΔABD este echilateral..**2p**

b) Fie $\{F\}=BE\cap AD$. Aplicând teorema lui Menelaus în ΔADC cu transversala $E-F-B$, rezultă $\frac{DF}{FA}\cdot\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CB}{DB}=1$ **2p**

Deoarece $\frac{AE}{CE}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{CB}{DB}=2$ rezultă că $AF=DF$ **1p**

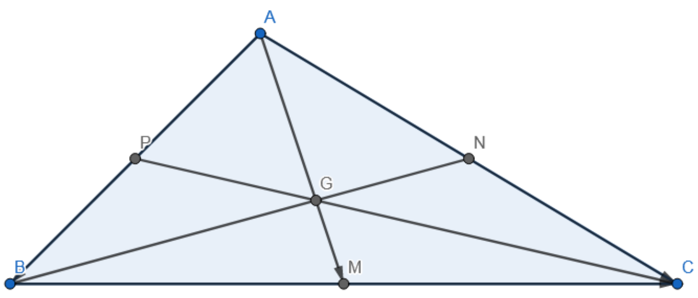
Deoarece ΔABD este echilateral, iar F este mijlocul $[AD]$, rezultă că $BE\perp AD$ **1p**

Problema 4. Se consideră un triunghi ABC având medianele $(AM),(BN),(CP)$. Să se demonstreze că se poate construi un triunghi cu vectorii :

a) $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$;

b) $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$, unde $\{G\}=AM\cap BN\cap CP$.

BAREM DE CORECTURĂ



$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ **1p**

a) Obţinem că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}+\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}+\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}=\vec{0}$. **3p**

b) Deoarece $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BN}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CP}=-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}\right)=\vec{0}$, rezultă că se poate construi un triunghi cu vectorii $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$ **3p**