MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAŢIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X-a

Problema 1. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2-\frac{1}{2\cdot x}\right)^n$, $x\in(0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinaţi valorile lui n, ştiind că suma coeficienţilor primilor trei termeni ai dezvoltării este cel mult egală cu 4.

b) Pentru $n=8$, determinaţi termenul care-l conţine pe x^{10}.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Obţine $C_n^0-\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{4}\le 4$ ……………………………………………… **1p**

Deduce $n^2-5n-24\le 0$ ……………………………………………… **1p**

Deoarece $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$ obţine $n\in\{2,3,4,...,8\}$ ……………………………………………… **2p**

b) Obţine $T_{k+1}=C_8^k x^{16-2k}\cdot\frac{(-1)^k}{2^k\cdot x^k}$ ……………………………………………… **1p**

Din condiţia $x^{16-3k}=x^{10}$, obţine $k=2$ ……………………………………………… **1p**

Finalizare: $T_3=C_8^2\cdot x^{10}\cdot 2^{-2}=7x^{10}$ este termenul căutat……………………………………………… **1p**

Problema 2. După fiecare an de utilizare, preţul unui autoturism scade cu 10% din valoarea avută la începutul acelui an.

a) Determinaţi preţul unui autoturism după trei ani de utilizare , ştiind că preţul de achiziţie a fost de 10000 de euro.

b) După câţi ani autoturismul pierde cel puţin 90% din valoarea iniţială? (Se poate folosi $\lg 3=0,477$)

BAREM DE CORECTURĂ

a) Fie P preţul iniţial şi P_i -preţul după i ani de utilizare.

$P_1=0,9\cdot P=9000$ **euro**……………………………………………… **1p**

$P_2=0,9\cdot P_1=8100$ **euro**……………………………………………… **1p**

$P_3=0,9\cdot P_2=7290$ **euro**……………………………………………… **1p**

b) După n ani de utilizare, preţul va deveni $P_n=\left(\frac{9}{10}\right)^n\cdot P$ ……………………………………………… **1p**

Este necesar ca $P_n\le\frac{P}{10}\Leftrightarrow\left(\frac{9}{10}\right)^n\le\frac{1}{10}$ ……………………………………………… **1p**

Logaritmând, vom obţine $n(2\lg 3-1)\le -1\Leftrightarrow n\ge\frac{1000}{46}$ ……………………………………………… **1p**

Deoarece $n \in \mathbb{N}$, rezultă că după cel puţin 22 de ani pierde cel puţin 90% din valoarea iniţială.......... **1p**

Problema 3. Într-un sistem de axe de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n,1)$, $B_n(1,n)$ $n \in \mathbb{N}^*$ şi mulţimea $M = \{A_1, A_2, A_3, B_2, B_3\}$.

a) Câte drepte determină elementele mulţimii M ?

b) Câte triunghiuri determină elementele mulţimii M ?

c) Demonstraţi că punctele A_1, P, Q sunt coliniare, unde $\{P\} = A_2B_3 \cap A_3B_2$ şi Q este mijlocul lui $[A_3B_3]$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Prin punctele mulţimii trec 6 drepte **2p**
$(A_1A_2, A_1B_2, B_2A_2, B_2A_3, B_3A_2, B_3A_3)$

b) Elementele mulţimii M determină 8 triunghiuri , şi anume: $\Delta B_2A_1A_2$, $\Delta B_2A_1A_3$, $\Delta B_2A_2A_3$, $\Delta B_3A_1A_2$, $\Delta B_3A_1A_3$, $\Delta B_3A_2A_3$, $\Delta A_2B_2B_3$, $\Delta A_3B_2B_3$ **2p**

c) Obţine $Q(2,2)$ **1p**

Obţine $(A_2B_3): 2x + y - 5 = 0$ şi $(A_3B_2): x + 2y - 5 = 0$ şi, de aici, $P\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ **1p**

Deoarece $m_{A_1P} = m_{A_1Q} = 1$, rezultă că punctele A_1, P, Q sunt coliniare...**1p**

Problema 4. Să se determine $tg(x)$, ştiind că $\log_a\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(\sin x + \cos x)\right] = \log_{a^2}(\sin x) + \log_{a^2}(\cos x)$, unde $a \in (1, \infty)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

BAREM DE CORECTURĂ

Obţine $\log_a\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(\sin x + \cos x)\right] = \frac{\log_a(\sin x \cdot \cos x)}{2}$ **2p**

Obţine $2 \cdot \sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$ **2p**

Deoarece $\cos x \neq 0$, se obţine, prin împărţire, $2tg^2 x - 5tg\, x + 2 = 0$ **1p**

Obţine $tg\, x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ **1p**

Deoarece $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă că $tg\, x < 1$, deci $tg\, x = \frac{1}{2}$ **1p**

<u>SAU</u>

$\log_a\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(\sin x + \cos x)\right] = \frac{1}{2}\log_a(\sin x \cdot \cos x)$ **2p**

Obţinem: $\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(\sin x + \cos x)\right]^2 = \sin x \cdot \cos x$ **1p**

$\sin x \cdot \cos x = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5}$ **1p**

$\frac{2\text{tg}\, x}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{tg}^2 x - 5\text{tg}\, x + 2 = 0$ **1p**

Rezultă $\text{tg}\, x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ **1p**

Deoarece $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă că $\text{tg}\, x < 1$, deci $\text{tg}\, x = \frac{1}{2}$ **1p**