MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI –a

Problema 1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați C^{-1}.

b) Determinați matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ dacă $CA=XC$.

c) Determinați matricea $X^n,\ n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, unde X este matricea determinată la punctul b).

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\det C=4\Rightarrow(\exists)C^{-1}, C^t=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}, C^*=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}, C^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ **2p**

b) $CA=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$

$XC=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+5b & a+3b\\ 3c+5d & c+3d\end{pmatrix}$

$CA=XC\Leftrightarrow\begin{cases}3a+5b=4\\ a+3b=1\\ 3c+5d=8\\ c+3d=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{7}{4}\\ b=-\frac{1}{4}\\ c=\frac{9}{4}\\ d=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7 & -1\\ 9 & 1\end{pmatrix}$ **2p**

<u>**SAU**</u>

$X=CAC^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7 & -1\\ 9 & 1\end{pmatrix}$ **2p**

c) Se demonstrează prin inducție matematică:

$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$ **1p**

Finalizare

$X^n=(CAC^{-1})\cdot(CAC^{-1})\cdot(CAC^{-1})\cdot\ldots\cdot(CAC^{-1})=(CA^2C^{-1})\cdot(CAC^{-1})\cdot\ldots\cdot(CAC^{-1})=$
$=(CA^3C^{-1})\cdot\ldots(CAC^{-1})=CA^nC^{-1}$ **1p**

$X^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3n+4 & -n\\ 9n & -3n+4\end{pmatrix}$ **1p**

Problema 2. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{Q})$ cu AB=BA și $\det(A)=1$.

a) Demonstrați că $A^3-B^3=(A-B)(A-\varepsilon B)\cdot(A-\varepsilon^2B)$ unde ε este o rădăcină cubică complexă de ordinul trei a unității.

b) Considerând $f(x)=\det(A+xB)=ax^2+bx+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Q}$ și $\det(A-\sqrt{7}B)=8$, calculați $\det(A^3-B^3)$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Verificare directă.
Se tine seama de ipoteză și de faptul că $\varepsilon^3 = 1$ și $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,\ \varepsilon \in \mathbb{C}$. **2p**

b) Avem $\left.\begin{array}{l} f(0) = \det(A) \\ f(0) = c \\ \det(A) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 1$ **2p**

Din $f(-\sqrt{7}) = 8 \Rightarrow 7a - \sqrt{7}b + 1 = 8 \Rightarrow 7a - 7 - \sqrt{7}b = 0,\quad a, b \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$ **1p**

Finalizare

$\det(A^3 - B^3) = \det(A - B)\det(A - \varepsilon B)\det(A - \varepsilon^2 B) = f(-1)f(-\varepsilon)f(-\varepsilon^2) = 2(\varepsilon^2 + 1)(\varepsilon^4 + 1) =$
$2(\varepsilon^2 + 1)(\varepsilon + 1) = 2(-\varepsilon)(-\varepsilon^2) = 2\varepsilon^3 = 2$. **2p**

Problema 3. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

a) Demonstrați că f este strict crescătoare.

b) Demonstrați că $(x^2 + 1)f''(x)f(x) = f'(x), (\forall)x \in \mathbb{R}$

BAREM DE CORECTURĂ

a) $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$..**1p**

$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, deoarece $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$...**2p**

b) $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f''(x) = \frac{f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}f(x)}{x^2+1}$..**1p**

Obținem că $(x^2 + 1)f''(x) = f'(x)\sqrt{x^2 + 1} - xf'(x)$..**1p**

Relație echivalentă cu $(x^2 + 1)f''(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{f'(x)}{f(x)}$, de unde rezultă concluzia.......................**2p**

Problema 4. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-2x} - x + a, a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

c) Demonstrați că f este bijectivă și aflați a știind că $f^{-1}(-2) = 1$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $f'(x) = -2e^{-2x} - 1,\ (\forall)x \in \mathbb{R}$ **1p**

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, deci f nu admite asimptote orizontale **2p**

$m_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$n_1 = \lim_{x\to\infty}(f(x) + x) = \lim_{x\to\infty}(e^{-2x} + a) = a$

$y = -x + a$ asimptotă oblică spre ∞ la graficul funcției..**1p**

$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, deci nu există asimptotă oblică spre $-\infty$. **1p**

c)

x	$-\infty$ ∞
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - - - - -
$f(x)$	∞ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ $-\infty$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow f$ surjectivă.

f strict descrescătoare, deci injectivă și deci f bijectivă.

Din $-2 = f(1) \Leftrightarrow -2 = e^{-2} - 1 + a \Rightarrow a = -1 - e^{-2}$...**2p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*