MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}dt, n \geq 0.$

a) Calculați $I_{3.}$

b) Demonstrați că $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

c) Demonstrați că numărul $A = I_0 + I_2 + I_4 + ... + I_{2020}$ este irațional.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $I_{3.} = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}dt = \int_0^1 \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$ **2p**

b) $I_{2n} + I_{2n-2} = \int_0^1 \frac{t^{2n-2}\left(t^2+1\right)}{t^2+1}dt = \int_0^1 t^{2n-2}dt = \frac{1}{2n-1}, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$ **2p**

c) $A = I_0 + \left(I_2 + I_4\right) + \left(I_6 + I_8\right) + ... + \left(I_{2018} + I_{2020}\right) =$ **2p**

$= \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2019} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **1p**

Problema 2.

Se consideră mulțimea $M = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{2}b \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ \hat{2}c & \hat{0} & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z}_4\}, M \subset M_3(\mathbb{Z}_4)$, iar $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii M.

b) Demonstrați că oricare ar fi matricea $A \in M$, avem $A^2 = O_3$ sau $A^2 = I_3$.

c) Câte matrice din M au proprietatea că $A^2 = I_3$? Scrieți aceste matrice.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $a \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$, $\hat{2}b \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$, $\hat{2}c \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$

Vor fi $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ elemente distincte în M.. **2p**

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{2}b \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ \hat{2}c & \hat{0} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{2}b \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ \hat{2}c & \hat{0} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a^2 & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & a^2 \end{pmatrix}, a^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ **1p**

Dacă $a \in \{\hat{0}, \hat{2}\} \Rightarrow a^2 = \hat{0} \Rightarrow A^2 = O_3$ **1p**

Dacă $a \in \{\hat{1}, \hat{3}\} \Rightarrow a^2 = \hat{1} \Rightarrow A^2 = I_3$ **1p**

c) $a \in \{\hat{1}, \hat{3}\}$, $\hat{2}b \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$, $\hat{2}c \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$, deci 8 matrice au proprietatea cerută. **1p**
Finalizare...**1p**

Problema 3.

Fie $f = X^3 - mX^2 + nX + 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Determinați m, n dacă $x = -1$ este rădăcină dublă.

b) Demonstrați că, dacă f admite rădăcina $\sqrt{3}$, atunci f admite o rădăcină rațională. Determinați această rădăcină.

c) Fie $m, n \in \mathbb{Z}$ cu $f(-2); f(1)$ numere impare. Demonstrați că f nu are rădăcini întregi.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $f' = 3x^2 - 2mx + n,\ f'' = 6x - 2m$ **1p**

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \Leftrightarrow m + n = 4 \\ f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 2m + n = -3 \\ f''(-1) \neq 0 \Leftrightarrow m \Leftrightarrow m \neq -3 \end{cases}$$

Obținem $m = -7, n = 11$ **1p**

b) $f \in \mathbb{Q}[X] \Rightarrow$ f admite și pe $-\sqrt{3}$ ca rădăcină.

Din $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) + x_3 = m \Rightarrow x_3 = m \in \mathbb{Q}$ **1p**

$x^2 - 3$ divide pe f, deci restul împărțirii lui f la $(x^2 - 3)$ este 0, deci $(n + 3)x + 5 - 3m = 0$, rezultă $n = -3, m = \frac{5}{3}$ deci $x_3 = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$ **1p**

c) Presupunem că avem o rădăcină întreagă $k \in \mathbb{Z}$.

Rezultă $(f(-2) - f(k)) ⋮ (-2 - k) \Leftrightarrow f(-2) ⋮ (-2 - k)$;.

$f(-2)$ este număr impar, deci k impar (3) **2p**

$(f(1) - f(k)) ⋮ (1 - k) \Leftrightarrow f(1) ⋮ (1 - k)$; $f(1)$ este număr impar, deci k par (4)

Din (3) și (4) obținem o contradicție.

Prin urmare f nu are rădăcini întregi. **1p**

Problema 4.

Se consideră funcția $f: [0,3] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x + 6}$.

a) Calculați aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției f, axa (Ox) și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 3$.

b) Determinați $m > 0$ astfel încât volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $f(x + m)$ în jurul axei (Ox) să fie $\frac{2031\pi}{2}$.

c) Demonstrați că $\int_0^3 x^2 f(x)dx \leq 27$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Avem $A = \int_0^3 \sqrt{x + 6}\, dx$

$\sqrt{x + 6} = t \Rightarrow x + 6 = t^2 \Leftrightarrow x = t^2 - 6$, $dx = 2tdt$

$x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{6}; x = 3 \Rightarrow t = 3$ **1p**

$A = 2\int_{\sqrt{6}}^3 t^2 dt = 2\frac{t^3}{3}\Big|_{\sqrt{6}}^3 = 18 - 4\sqrt{6}$ **1p**

b) Avem ecuația $\pi \int_0^3 (x + 6 + m)dx = \frac{2031\pi}{2}$ **1p**

Finalizare $m = 334$ **1p**

c) Avem $\sqrt{6} \leq f(x) \leq 3 \Rightarrow \sqrt{6}\, x^2 \leq x^2 f(x) \leq 3x^2$ **1p**

Integrăm pe [0, 3] și obținem

$\sqrt{6}\int_0^3 x^2 dx \leq \int_0^3 x^2 f(x)dx \leq 3\int_0^3 x^2 dx$ **1p**

Finalizare **1p**