MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI -a

Problema 1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați C^{-1}.

b) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ dacă $CA = XC$.

c) Determinați matricea $X^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, unde X este matricea determinată la punctul **b)**.

Problema 2. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ cu $AB = BA$ și $\det(A) = 1$.

a) Demonstrați că $A^3 - B^3 = (A-B)(A-\varepsilon B)(A-\varepsilon^2 B)$ unde ε este o rădăcină cubică complexă de ordinul trei a unității.

b) Considerând $f(x) = \det(A + xB) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și $\det(A - \sqrt{7}B) = 8$, calculați $\det\left(A^3 - B^3\right)$.

Problema 3. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

a) Demonstrați că *f* este strict crescătoare.

b) Demonstrați că $\left(x^2+1\right) f''(x) f(x) = f'(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-2x} - x + a, a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Determinați asimptotele la graficul funcției *f*

c) Demonstrați că *f* este bijectivă și aflați *a* știind că $f^{-1}(-2) = 1$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*