



CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘIETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII -a

Problema 1. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1} dt, n \geq 0$.

- Calculați I_3 .
- Demonstrați că $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}, (\forall)n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- Demonstrați că numărul $A = I_0 + I_2 + I_4 + \dots + I_{2020}$ este irațional.

Problema 2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A \mid A = \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{2}b \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ \hat{2}c & \hat{0} & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}, M \subset M_3(\mathbb{Z}_4), \text{ iar } \mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}.$

- Determinați numărul elementelor mulțimii M.
- Demonstrați că oricare ar fi matricea $A \in M$, avem $A^2 = O_3$ sau $A^2 = I_3$.
- Câte matrice din M au proprietatea că $A^2 = I_3$? Scrieți aceste matrice.

Problema 3. Fie $f = X^3 - mX^2 + nX + 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

- Determinați m, n dacă $x = -1$ este rădăcină dublă.
- Demonstrați că, dacă f admite rădăcina $\sqrt{3}$ atunci f admite o rădăcină rațională. Determinați această rădăcină.
- Fie $f(-2), f(1)$ cu numere impare. Demonstrați că f nu are rădăcini întregi.

Problema 4. Se consideră funcția $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+6}$.

- Calculați aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției f , axa (Ox) și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 3$.
- Determinați $m > 0$, astfel încât volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $f(x+m)$ în jurul axei (Ox) să fie $\frac{2031\pi}{2}$.
- Demonstrați că $\int_0^3 x^2 f(x) dx \leq 27$.