MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

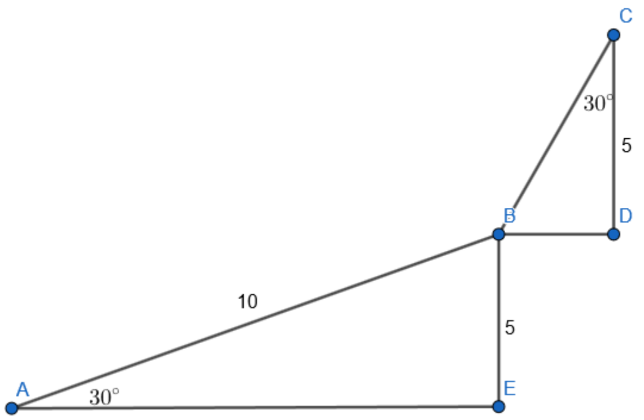
Filiera Teoretică: profilul Uman

Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. Un avion decolează de la Iaşi spre Roma şi se înalţă în zbor pentru primii 10 km parcurşi sub un unghi de 30^0 faţă de orizontală. Apoi se înalţă sub un unghi de 60^0 faţă de orizontală, până atinge altitudinea totală de 10 km. Determinați distanţa parcursă de la decolare până atinge altitudinea de 10 km. ($\sqrt{3}$ se aproximează cu 1,71).

BAREM DE CORECTURĂ



$\left.\begin{array}{l}\Delta ABE \text{ dreptunghic}\\ m(\hat{A})=30^0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}BE=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{10}{2}=5\\ FC=10\end{array}\right\}\Rightarrow$

$CD=5$km..**2p**

$\left.\begin{array}{l}\Delta BDC, m(\widehat{D})=90^0\\ m(\widehat{B})=60^0\end{array}\right\}\Rightarrow sin\widehat{B}=\frac{CD}{BC}=\frac{5}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **2p**

$BC=\frac{10}{\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ km **1p**

Distanţa este $AB+BC=10km+\frac{10\sqrt{3}}{3}km=10\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$=10\left(1+\frac{1{,}71}{3}\right)=10(1+0{,}57)=1{,}57\cdot 10=15{,}7km$........**2p**

Problema 2. Pe o tablă este scrisă secvența (a,b,c,d). La fiecare „pas”, secvența se schimbă în $(|a-b|,|b-c|,|c-d|,|d-a|)$ și tot așa(ex. (4,8,5,3,7) → (4,3,2,4,3) ...). Dacă se pornește cu secvența (1,1,1,1,0) determinați secvența după 2018 operații aritmetice.

BAREM DE CORECTURĂ

(1,1,1,1,0) → (0,0,0,1,1) → (0,0,1,0,1) → (0,1,1,1,1) → (1,0,0,0,1) → (1,0,0,1,0) → (1,0,1,1,1) → (1,1,0,0,0) → (0,1,0,0,1) → (1,1,0,1,1) → (0,1,1,0,0) → (1,0,1,0,0) → (1,1,1,0,1) → (0,0,1,1,0) → (0,1,0,1,0) → (1,1,1,1,0)..**3p**

Secvența se repetă la fiecare 15 „pași”.

La fiecare „pas” utilizăm 5 operații aritmetice, adică $2018:5=403$ rest 3, adică 403 „pași” și 3 operații..**2p**

După 403 „pași”, secvența este (1,1,1,0,1)..**1p**

Secvența căutată este $(1-1,1-1,1-0,0,1)=(0{,}0{,}1{,}0{,}1)$..**1p**

Problema 3. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2(m-1)x + m - 1, m \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcţia f să fie crescătoare pe $[0, \infty)$.
- **b)** Determinaţi valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f are valoarea minimă $\frac{1}{4}$.
- **c)** Determinaţi valorile lui $m \in \mathbb{Z}$ pentru care rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ sunt numere întregi.
- **d)** Să se determine valorile lui m pentru care $3x_1 - x_2 = 2$.

BAREM DE CORECTURĂ

a)

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 > 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right), f\ (s) \nearrow \\ f\ \nearrow pe\ [0, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow [0, +\infty) \subset \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right) \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$m \leq 1 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1]$ **1p**

b) $f_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4(m-1)^2 - 4(m-1)}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 4(m-1) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2m - 2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$..**1p**

c) $f(x) = 0$, $\Delta = 4(m-1)(m-2)$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$ este necesar ca Δ să fie pătrat perfect...**1p**

Cum $(m-2)$ și $(m-1)$ sunt numere întregi consecutive, obținem $m = 2$ sau $m = 1$

$m = 1 \Longrightarrow x_1 = x_2 = 0 \in \mathbb{Z}, m = 2 \Longrightarrow x_1 = x_2 = 1$...**1p**

d) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ 4x_1 = 2m \Leftrightarrow x_1 = \frac{m}{2} \end{cases}$ **1p**

$3 \cdot \frac{m}{2} - 2 = x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3m-4}{2}$

$x_1 \cdot x_2 = m - 1 \Leftrightarrow \frac{m}{2}\left(\frac{3m-4}{2}\right) = m - 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m = 4m - 4 \Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0$.....................**1p**

$\Delta = 64 - 48 = 16, m_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{6}, m_1 = 2, m_2 = \frac{2}{3}, m \in \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$...**1p**

Problema 4. Fie ABC un triunghi.

- **a)** Demonstrați că vectorul $\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ rămâne constant pentru orice punct M din exteriorul triunghiului.
- **b)** Rămâne propoziţia adevărată pentru vectorul $\overrightarrow{v_M} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 6\overrightarrow{MC}$?
- **c)** Determinaţi o relaţie între constantele $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorul $\overrightarrow{v_M} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ să rămână constant când punctul M variază în plan.

BAREM DE CORECTURĂ

- **a)** $\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) =$
  $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ nu depinde de M..**2p**
- **b)** $\overrightarrow{v_M} = 2\overrightarrow{MA} + 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 6(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = 5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}$
  depinde de M...**2p**
- **c)** Generalizare:

$\overrightarrow{v_M} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{MA} + \gamma\overrightarrow{AC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$

Așadar, $\alpha + \beta + \gamma = 0$. **3p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă se va puncta conform baremului.*