CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

Filiera Teoretică: profilul Uman

Clasa a X –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. O bancă oferă o dobândă fixă de 10% la depozitele pe un an. Trei prieteni își duc economiile la bancă și se decid să depună împreună în același cont, aceeași sumă de bani, astfel că: primului îi rămâne 50% din suma pe care a economisit-o, celui de-al doilea 75% din suma pe care a economisit-o, iar celui de-al treilea 37.5% din suma pe care a economisit-o. După un an, al doilea prieten își retrage suma care i se cuvine, iar împreună cu suma rămasă după prima depunere face o depunere integrală la o altă bancă care oferă o dobândă de 20% la depozitele pe un an. După încă un an, cei trei decid să își retragă banii din bănci și constată următorul lucru: suma pe care o are al doilea este cu 125 de euro mai mică decât suma celorlați doi la un loc cu tot cu economiile rămase de la prima depunere. Determinați economiile inițiale ale celor trei prieteni.(economiile rămase după prima depunere nu au fost modificate în timpul celor doi ani)

BAREM DE CORECTURĂ

Notăm cu x, y, z economiile inițiale ale celor trei prieteni..**1p**

Fiecare depune $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{5z}{8} = k$, iar după un an, au împreună $3k + \frac{3k}{10} = \frac{33k}{10}$ €.......................................**2p**

Finalizare...**4p**

Problema 2. Fie $f: D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ln\frac{(x-1)^2}{x^2-5x+6}$.

a) Determinați domeniul maxim de definiție D.

b) Definim șirul $(x_n)_{n\geq 4}, x_n = f(n)$. Demonstrați că $x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = ln\left(\frac{(n+1)}{(n-2)^2} \cdot \frac{(n+2)^2}{(n-3)}\right)$

c) Demonstrați că $f(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\frac{(x-1)^2}{x^2-5x+6} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \end{cases} D = (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \setminus \{1\}$................**1p**

b) $\left.\begin{aligned} x_n &= ln\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \\ x_{n+1} &= ln\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \\ x_{n+2} &= ln\frac{(n+1)^2}{n(n-1)} \\ x_{n+3} &= ln\frac{(n+2)^2}{(n+1)n} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = ln\frac{(n-1)^2n^2(n+1)^2(n+2)^2}{(n-2)(n-3)(n-1)(n-2)n(n-1)n(n+1)} =$

$ln\frac{(n+1)(n+2)^2}{(n-2)^2(n-3)}$..**3p**

c) $f(n) = ln\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}, n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Longrightarrow n-1 > n-2 > 0, n-1 > n-3 > 0$................................**1p**

$$f(n) > 0 \Leftrightarrow \frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} > 1 \Leftrightarrow (n-1)^2 > (n-2)(n-3) \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 > n^2 - 5n + 6$$

$3n > 5 \Longrightarrow n > \frac{5}{3}$ (A)..**2p**

Problema 3. a) Rezolvați ecuația $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$.
b) Rezolvați inecuația $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x-3)$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $x^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup [\sqrt{5}, +\infty)$..**1p**
Ecuația este echivalentă cu: $2^{2(x-\sqrt{x^2-5})} - 6 \cdot 2^{x-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$
Notăm $2^{x-\sqrt{x^2-5}} = t, t > 0$ și obținem $t^2 - 6t + 8 = 0$, cu soluțiile $t_1 = 2$ sau $t_2 = 4$.......................**1p**
Avem $2 = 2^{x-\sqrt{x^2-5}}$ sau $4 = 2^{x-\sqrt{x^2-5}}$
Obținem $x - \sqrt{x^2-5} = 1$ sau $x - \sqrt{x^2-5} = 2 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2-5}$ sau $x - 2 = \sqrt{x^2-5}$
$x - 1 \geq 0$ sau $x - 2 \geq 0 \Longrightarrow x \in [\sqrt{5}, +\infty)$
$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5$ sau $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 5 \Leftrightarrow$
$2x = 6, x = 3 \in D$ sau $4x = 9, x = \frac{9}{4}$.
$\frac{9}{4} > \sqrt{5}, \sqrt{81} > \sqrt{80}$.
$S = \left\{3, \frac{9}{4}\right\}$..**2p**

b) $\begin{cases} x + 4 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \\ x + 4 > x^2 + 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \\ x^2 + x - 7 < 0, \Delta = 29, x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} \end{cases}$..**2p**

$\begin{cases} x \in (-4, -3) \cup (1, \infty) \\ x \in \left(\frac{-1-\sqrt{29}}{2}, \frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{-1-\sqrt{29}}{2}, -3\right) \cup \left(1, \frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$...**1p**

Problema 4. Fie dreptele $(d_1): mx + (m+2)y + 6 = 0$ și $(d_2): (m-1)x + my + 3 = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$.
a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $d_1 \equiv d_2$.
b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $d_1 \perp d_2$.
c) Pentru $m = -\frac{1}{2}$ să se calculeze aria poligonului care are vârfurile $\{A\} = d_1 \cap d_2$, $\{B\} = d_2 \cap Ox, \{C\} = d_1 \cap Oy, O$ −originea reperului.

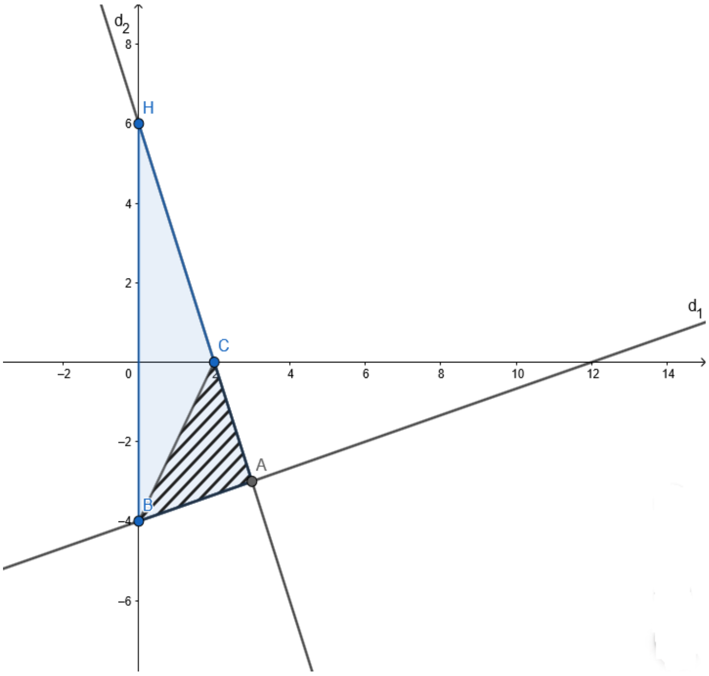
BAREM DE CORECTURĂ

a) $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \frac{m}{m-1} = \frac{m+2}{m} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \frac{m}{m-1} = 2$..**1p**
$m = 2m - 2 \Leftrightarrow m = 2$ și $\frac{m+2}{m} = 2 \Leftrightarrow m = 2$

Deci pentru $m = 2, d_1 \equiv d_2$..**1p**

b) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \frac{m}{m+2} \cdot \frac{m-1}{m} = -1 \Leftrightarrow m^2 - m = -m^2 - 2m \Leftrightarrow 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ sau $m = -\frac{1}{2}$....**1p**

c) $m = -\frac{1}{2} \Longrightarrow d_1 : -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 6 = 0 \Leftrightarrow d_1 : -x + 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow d_1 : 3y = x - 12$..........................**1p**



$d_2 : -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 3 = 0 \Leftrightarrow -3x - y + 6 = 0$

$\Leftrightarrow d_2 : y = -3x + 6, d_1 \cap d_2 = \{(3, -3)\}$

$d_2 \cap Ox : y = 0 \Longrightarrow x = 2, B = (2,0)$

$d_1 \cap Oy : x = 0 \Longrightarrow y = -4, C = (0, -4)$...........**1p**

$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABH) - \mathcal{A}(BCH) = 9$..............**1p**

Finalizare...**1p**

Notă: *Orice altă variantă corectă se punctează conform baremului.*