



**CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Uman

Clasa a XII –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1. Se consideră determinantul: $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 3-x & 2 \\ 2-x & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1-x \end{vmatrix}$, x număr real.

- a) Demonstrați că $\Delta(x) = (x-6) \cdot (x^2 - 3)$.
- b) Dacă x și y sunt numere întregi, demonstrați că $\Delta(x) - \Delta(y)$ se divide prin $(x - y)$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 6-x & 3-x & 2 \\ 6-x & 1 & 3 \\ 6-x & 2 & 1-x \end{vmatrix}$ 2p

$\Delta(x) = (6-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = (x-6) \cdot (x^2 - 3)$ 1p

b) $\Delta(x) = x^3 - 6x^2 - 3x + 18$ 1p

$\Delta(x) - \Delta(y) = (x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2 - 6x - 6y - 3)$ 2p

Rezultă că $\Delta(x) - \Delta(y)$ se divide prin $(x - y)$1p

Problema 2. Se dă mulțimea $M = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}; x^2 - 2y^2 = 1 \right\}$.

- a) Demonstrați că mulțimea M conține cel puțin cinci elemente.
- b) Demonstrați că pentru orice $A, B \in M$ rezultă că $A \cdot B \in M$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Pentru $x = \pm 1$ și $y = 0$, obținem două elemente din M1p

Pentru $x = \pm 3$ și $y = \pm 2$, obținem alte patru elemente din M2p

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} \in M$.

$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac + 2bd & ad + bc \\ 2(ad + bc) & ac + 2bd \end{pmatrix}$ 1p

Cum $A, B \in M$ avem: $a^2 - 2b^2 = 1$ și $c^2 - 2d^2 = 1$1p

Notăm: $x = ac + 2bd$ și $y = ad + bc$.

$x^2 - 2y^2 = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = (a^2 - 2b^2) \cdot (c^2 - 2d^2) = 1 \Rightarrow A \cdot B \in M$2p

Problema 3. Numim *cod* o matrice cu 3 linii și 3 coloane cu elementele numere întregi, de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}, \text{ unde } a, b, c, d, e, f \text{ sunt numere întregi având modulul } 2.$$

- Demonstrați că putem forma 64 *coduri*.
- Dacă A este un *cod*, demonstrați că $\det(A) \in \{-16, 0, 16\}$.
- Claudiu și Oana completează un *cod*, înlocuind succesiv, oricare dintre literele a, b, c, d, e, f cu cifrele 2 sau -2. Oana este declarată câștigătoare a jocului dacă $\det(A) = 0$. Claudiu începe jocul. Demonstrați că indiferent de alegerile făcute de Claudiu, Oana poate câștiga jocul.

BAREM DE CORECTURĂ

- Sunt $2^6 = 64$ *coduri*.1p
- $\det(A) = ade + bcf$1p
Dar ade și $bcf \in \{-8, 8\} \Rightarrow \det(A) \in \{-16, 0, 16\}$1p
- Dacă Claudiu alege elementul a_{ij} , Oana alege elementul $a_{ji} = -a_{ij}$; $i, j \in \{1, 2, 3\}$2p

Se obține *codul* $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ 1p

$\det(A) = 0$, deci Oana poate câștiga jocul.1p

Problema 4. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție “*” prin $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, pentru orice x, y numere reale.

- Demonstrați că legea este comutativă și asociativă.
- Sorin alege numerele 8, -56, -6 și calculează $(x * y) * z$, unde (x, y, z) este o permutare a numerelor alese. Demonstrați că de fiecare dată Sorin obține același rezultat.
- Pe tablă sunt scrise numerele: 0, 1, 2, 3, ..., 10. Sorin alege, în mod arbitrar, dintre acestea, două numere a și b , le șterge, iar în locul doar unuia dintre ele scrie numărul $a * b$. Continuă procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este acest număr?

BAREM DE CORECTURĂ

- $x * y = xy - 5x - 5y + 30 = yx - 5y - 5x + 30 = y * x$1p
 $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$.
 $(x * y) * z = [(x - 5)(y - 5) + 5] * z = (x - 5)(y - 5)(z - 5) + 5$, pentru orice x, y, z numere reale.
 $x * (y * z) = x * [(y - 5)(z - 5) + 5] = (x - 5)(y - 5)(z - 5) + 5$, pentru orice x, y, z numere reale.2p
- Indiferent care este permutarea, Sorin obține numărul:
 $(8 - 5) \cdot (-56 - 5) \cdot (-6 - 5) + 5 = 3 \cdot 61 \cdot 11 + 5 = 2018$2p
- Ținând cont de comutativitatea și asociativitatea legii de compoziție “*”, numărul rămas pe tablă este $n = 0 * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = x * 5 * y = 5$ deoarece 5 este “element distrugător”.2p