

**CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI**ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018**FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL**Filiera Teoretică: profilul Uman****Clasa a XII –a**

Problema 1. Se consideră determinantul: $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 3-x & 2 \\ 2-x & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1-x \end{vmatrix}$, x număr real.

- Demonstrați că $\Delta(x) = (x-6) \cdot (x^2 - 3)$.
- Dacă x și y sunt numere întregi, demonstrați că $\Delta(x) - \Delta(y)$ se divide prin $(x - y)$.

Problema 2. Se dă mulțimea $M = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}; x^2 - 2y^2 = 1 \right\}$.

- Demonstrați că mulțimea M conține cel puțin cinci elemente.
- Demonstrați că pentru orice $A, B \in M$ rezultă că $A \cdot B \in M$.

Problema 3. Numim *cod* o matrice cu 3 linii și 3 coloane cu elementele numere întregi, de forma

$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$, unde a, b, c, d, e, f sunt numere întregi având modulul 2.

- Demonstrați că putem forma 64 *coduri*.
- Dacă A este un *cod*, demonstrați că $\det(A) \in \{-16, 0, 16\}$.
- Claudiu și Oana completează un *cod*, înlocuind succesiv, oricare dintre literele a, b, c, d, e, f cu cifrele 2 sau -2. Oana este declarată câștigătoare a jocului dacă $\det(A) = 0$. Claudiu începe jocul. Demonstrați că indiferent de alegerile făcute de Claudiu, Oana poate câștiga jocul.

Problema 4. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție "*" prin $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, pentru orice x, y numere reale.

- Demonstrați că legea este comutativă și asociativă.
- Sorin alege numerele 8, -56, -6 și calculează $(x * y) * z$, unde (x, y, z) este o permutare a numerelor alese. Demonstrați că de fiecare dată Sorin obține același rezultat.
- Pe tablă sunt scrise numerele: 0, 1, 2, 3, ..., 10. Sorin alege, în mod arbitrar, dintre acestea, două numere a și b , le șterge, iar în locul doar unuia dintre ele scrie numărul $a * b$. Continuă procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este acest număr?