MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

a) Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$ atunci are loc inegalitatea $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$.

b) Fie $x,y,z\in(0,+\infty)$ astfel încât $x+y+z=2$. Demonstrați că $\sqrt{11x+3}+\sqrt{11y+4}+\sqrt{11z+7}\le 6\sqrt{3}$.

Barem

a) Avem $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\le 3a^2+3b^2+3c^2$ **1p**

$2ab+2bc+2ac\le 2a^2+2b^2+2c^2$ **1p**

$0\le(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ **1p**

b) Fie $\sqrt{11x+3}=a, \sqrt{11y+4}=b, \sqrt{11z+7}=c$

Avem $a^2=11x+3, b^2=11y+4, c^2=11z+7$ **1p**

Folosim a) și rezultă

$\left(\sqrt{11x+3}+\sqrt{11y+4}+\sqrt{11z+7}\right)^2\le 3(11x+3+11y+4+11z+7)$. **1p**

$\left(\sqrt{11x+3}+\sqrt{11y+4}+\sqrt{11z+7}\right)^2\le 3[11(x+y+z)+14]$. **1p**

Finalizare: $\sqrt{11x+3}+\sqrt{11y+4}+\sqrt{11z+7}\le 6\sqrt{3}$. **1p**

Problema 2.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $2|x-3|+y^2+9z^2+1=2y+12z$.

b) Determinați numerele întregi n pentru care $|7n+14|\le|6n|$.

Barem

a) Ecuația se scrie $2|x-3|+(y-1)^2+(3z-2)^2=4$ **1p**

$\left.\begin{array}{l} z\in(-\infty,-1]\cap\mathbb{Z}(\text{nu convine}) \\ z\in(1,\infty)\cap\mathbb{Z}(\text{nu convine}) \end{array}\right\}$ **1p**

Așadar, $z\in\{0,1\}$

Pentru $z=0\Rightarrow 2\cdot|x-3|+(y-1)^2=0\Rightarrow\begin{cases}|x-3|=1\\|y-1|=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ **0.5p**

Pentru $z=1\Rightarrow 2\cdot|x-3|+(y-1)^2=3\Rightarrow\begin{cases}|x-3|=1\\|y-1|=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-3=\pm1\\y-1=\pm1\end{cases}$

$1°.\begin{cases}x-3=1\\y-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

$2°.\begin{cases}x-3=1\\y-1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$ **0.5p**

$3°.\begin{cases}x-3=-1\\y-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

$4°.\begin{cases}x-3=-1\\y-1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$ **0.5p**

Așadar, mulțimea soluțiilor este: $S=\{(3,1,0);(4,2,1);(4,0,1);(2,2,1);(2,0,1)\}$ **0.5p**

b) $n=0$ nu verifică inecuația dată

Așadar, $\left|\frac{7n+14}{6n}\right|\le 1\Rightarrow -1\le\frac{7n+14}{6n}\le 1$ **1p**

Rezultă $\begin{cases}\frac{13n+14}{6n}\ge 0\\ \frac{n+14}{6n}\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\in\left\{\left(-\infty,-\frac{14}{13}\right]\cup(0,\infty)\right\}\cap\mathbb{Z}\\ n\in[-14,0)\cap\mathbb{Z}\end{cases}$ **1p**

Finalizare $n\in\{-14,-13,-12,...,-3,-2\}$ **1p**

Problema 3.

a) Calculați produsul $p=\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\sin\frac{19\pi}{12}$.

b) Dacă $\sin(a+b-c)=1$, demonstrați că $\sin(2a)+\cos(3a+b-c)=0$.

Barem

a) Avem $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{4}=-\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **1p**

$\sin\frac{4\pi}{3}=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{19\pi}{12}=-\sin\left(2\pi-\frac{19\pi}{12}\right)=-\sin\frac{5\pi}{12}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{12}$ **1p**

Rezultă că $p=-\frac{\sqrt{6}}{8}\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}}{16}\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{6}}{32}$ **1p**

b) Justifică relația $\cos(a+b-c)=0$ **1p**

Avem succesiv

$\cos(3a+b-c)=\cos[2a+(a+b-c)]$ **1p**

$=\cos(2a)\cdot\cos(a+b-c)-\sin(2a)\cdot\sin(a+b-c)=-\sin(2a)$ **1p**

Așadar, $\sin(2a)+\cos(3a+b-c)=0$ **1p**

Problema 4.

Se dă patrulaterul convex $MNPQ$ astfel încât $MP\perp NQ$ și $MP\cap NQ=\{O\}$. Fie A_1,A_2A_3,A_4 proiecțiile punctului O pe $[MN],[NP],[PQ]$, respectiv $[QM]$.

a) Demonstrați că $\frac{A_1M}{A_1N}\cdot\frac{A_2N}{A_2P}\cdot\frac{A_3P}{A_3Q}\cdot\frac{A_4Q}{A_4M}=1.$

b) Să se demonstreze că dreptele A_1A_4, A_2A_3 și NQ sunt concurente.

Barem

a) În triunghiul $NOM, OA_1 \perp NA, A_1 \in [MN]$, avem $OM^2 = MA_1 \cdot MN$ și $NO^2 = NA_1 \cdot NM \Rightarrow \frac{A_1M}{A_1N} = \frac{OM^2}{ON^2}$ (1),

analog $\frac{A_2N}{A_2P} = \frac{ON^2}{OP^2}$ (2), $\frac{A_3P}{A_3Q} = \frac{OP^2}{OQ^2}$ (3), $\frac{A_4Q}{A_4M} = \frac{OQ^2}{OM^2}$ (4)

Înmulțind relațiile (1) – (4) obținem **a)** **2p**

b) Fie $A_1A_4 \cap NQ = \{S\}, A_2A_3 \cap NQ = \{T\}$, demonstrăm că S=T.

În triunghiul *NMQ* aplicăm teorema lui Menelaus pentru punctele coliniare $S - A_1 - A_4$

avem $\frac{A_4M}{A_4Q}\cdot\frac{SQ}{SN}\cdot\frac{A_1N}{A_1M} = 1 \Rightarrow \frac{SQ}{SN} = \frac{OQ^2}{ON^2}$ (5) **2p**

În triunghiul *NPQ* aplicăm teorema lui Menelaus pentru punctele coliniare $T - A_2 - A_3$

Avem $\frac{TQ}{TN}\cdot\frac{A_2N}{A_2P}\cdot\frac{A_3P}{A_3Q} = 1 \Rightarrow \frac{TQ}{TN} = \frac{OQ^2}{ON^2}$ (6) **2p**

Din (5) și (6) rezultă că $\frac{SQ}{SN} = \frac{TQ}{TN}$ (7)

Finalizare S=T.. **1p**

Notă. *Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.*