MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X –a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

a) Să se determine *D*, domeniul maxim de definiție.
b) Să se demonstreze că funcția *f* este o funcție impară.
c) Să se calculeze suma $f\left(-\frac{1}{2019}\right)+f\left(-\frac{1}{2018}\right)+...+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+...+f\left(\frac{1}{2019}\right)$.

__Barem__

a) Determină $D=(-1,1)$ **2p**

b) $f(-x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}=\lg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$ **2p**

c) Cum *f* impară $\Rightarrow f(-x)+f(x)=0, \forall x\in D$ **1p**

Obține $f\left(-\frac{1}{2019}\right)+f\left(-\frac{1}{2018}\right)+...+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+...+f\left(\frac{1}{2019}\right)=$

$=f\left(-\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{1}{2019}\right)+...+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0)=f(0)=0$ **2p**

Problema 2.

Se consideră dezvoltarea $\left(\dfrac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\dfrac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n, n\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R}$.

a) Determinați *n* astfel încât $C_n^0, \dfrac{C_n^1}{2}, \dfrac{C_n^2}{4}$ să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.
b) Pentru $n=8$, verificați dacă există valori ale lui *x* astfel încât diferența dintre termenii al șaselea și al patrulea ai dezvoltării să fie 56.

Barem

a) $C_n^0, \dfrac{C_n^1}{2}, \dfrac{C_n^2}{4} \div \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}C_n^1 = \dfrac{1}{2}\left(C_n^0 + \dfrac{C_n^2}{4}\right)$ **1p**

$\dfrac{1}{2}n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}\right)$ **1p**

$n^2 - 9n + 8 = 0 \Rightarrow n = 8$ ($n = 1$ nu convine) **1p**

b) $T_6 - T_4 = 56 \Rightarrow C_8^5\left(\dfrac{2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{3}{16}}}\right)^{8-5}\cdot\left(\dfrac{2^{\frac{5}{16}}}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^5 - C_8^3\left(\dfrac{2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{3}{16}}}\right)^{8-3}\cdot\left(\dfrac{2^{\frac{5}{16}}}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^3 = 56$ **1p**

Obține $2^{1-x} - 2^x = 1 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 + 2^x - 2 = 0$ **2p**

Obține $2^x = 1$ sau $2^x = -2$, deci $x = 0$ **1p**

Problema 3.

Două puncte materiale *A* și *B* se deplasează de-a lungul curbelor date de legile de mișcare: $y_1(t) = 2^t$, respectiv $y_2(t) = -t + 6$, $t \ge 0$, unde timpul t se măsoară în secunde, iar y se măsoară în centimetri.

a) Reprezentați în sistemul ortogonal (tOy) legile de mișcare ale punctelor materiale *A* și *B*.

b) După cât timp se întâlnesc cele două puncte materiale și ce distanță a parcurs *B* până la momentul întâlnirii cu *A*?

Barem

a) Reprezintă geometric graficul funcției $y_1(t) = 2^t, t \ge 0$ **1p**

Reprezintă geometric graficul funcției $y_2(t) = -t + 6, t \ge 0$ **1p**

b) *A* întâlnește *B* $\Leftrightarrow G_{y_1} \cap G_{y_2} = \{P(t, y)\} \Leftrightarrow y_1(t) = y_2(t)$ **1p**

Obține ecuația $2^t = -t + 6$ și observă soluția $t = 2$ (sau o deduce din reprezentarea geometrică a celor două grafice) **1p**

Demonstrează că funcția $f(t) = 2^t + t - 6,\ t \ge 0$ este strict crescătoare, deci injectivă și astfel ecuația $f(t) = f(2)$ are soluție unică $t = 2$ $\Rightarrow$ cele două puncte se întâlnesc după 2 secunde **2p**

Punctul B se deplasează până se întâlnește cu A de la $(0,6)$ la $(2,4)$ și parcurge distanța de $2\sqrt{2}$ cm **1p**

Problema 4.

În reperul cartezian (xOy) se consideră triunghiul de vârfuri $A(0,1), B(2,1), C(1,-2)$.

a) Determinați punctul *M* situat pe axa *Ox* astfel încât triunghiul *AMB* să fie dreptunghic cu $m(\sphericalangle M) = 90^\circ$.

b) Demonstrați că două dintre medianele triunghiului sunt perpendiculare.

Barem

a) Fie $M(x,0) \in (Ox)$, $m(\sphericalangle AMB) = 90^\circ \Rightarrow AM^2 + MB^2 = AB^2$ **1p**

Obține $x^2 + 1 + (x-2)^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow M(1,0)$ **1p**

b) $A'\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ mijlocul lui $[BC]$, ecuația medianei $(AA'): y = -x + 1$ **2p**

$B'\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ mijlocul lui $[AC]$, ecuația medianei $(BB'): y = x - 1$ **2p**

$m_{AA'} = -1, m_{BB'} = 1 \Rightarrow m_{AA'} \cdot m_{BB'} = -1 \Rightarrow AA' \perp BB'$ **1p**