MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

a) Demonstrați că există $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^3=m\cdot A$.

b) Rezolvați ecuația $A\cdot X=B,\ X\in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Barem

a) Obține $m=10$ ……………………………………………………………………………**3p**

b) Daca $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, atunci se obține $\begin{cases}a+2b-c=0\\ 2a+2b=0\\ a+4b-3c=0\end{cases}$ ……………………………………………**1p**

Sistemul are soluția $(-t,\ \ t,\ \ t), t\in\mathbb{R}$ ……………………………………………**3p**

Problema 2. Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ și $X(t)=I_2+t\cdot A$, unde $t\in\mathbb{R}$.

a) Verificați egalitatea $X(t_1)\cdot X(t_2)=X\left((t_1+1)(t_2+1)-1\right)$.

b) Determinați valorile lui *t* pentru care matricea $X(t)$ este inversabilă.

c) Calculați $X^{-1}(1)\cdot X(2)\cdot X^{-1}(3)\cdot X(4)\cdot\ldots\cdot X(2018)$

Barem:

a) Verifică relația ……………………………………………………………………………**2p**

b) Impune condiția $X(t)$ – inversabilă $\Leftrightarrow \det(X(t))\neq 0 \Leftrightarrow t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ……………………**2p**

c) Prin inducție se obține $X(t_1)\cdot X(t_2)\cdot\ldots\cdot X(t_n)=X\left((t_1+1)(t_2+1)\cdot\ldots\cdot(t_n+1)-1\right)$ ……………**1p**

Folosind pct. b) se observă $X^{-1}(a)\cdot X(a+1)=X\left(\dfrac{1}{a+1}\right)$ ……………………………………**1p**

Finalizare $X^{-1}(1)\cdot X(2)\cdot X^{-1}(3)\cdot X(4)\cdot\ldots\cdot X(2018)=X\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot 2109}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\cdot 2018}-1\right)$ ……………………**1p**

Problema 3. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x-\frac{m\cdot x}{x+1},\ m\in\mathbb{R}$.

a) Determinați valorile parametrului m astfel încât tangenta la graficul funcției f în $x_0=1$ să fie paralelă cu dreapta $d:2x-y+1=0$.

b) Determinați valorile parametrului m astfel încât funcția f să fie strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

<u>**Barem:**</u>

a) Impune conditia ca panta tangentei sa fie egala cu panta dreptei $\Leftrightarrow f'(1)=2$ **1p**

Obține $f'(x)=\frac{x^2+x(2-m)+1}{x(x+1)^2}$ **1p**

Finalizare $f'(1)=2\Leftrightarrow m=-4$ **1p**

b) Impune conditia $f'(x)>0,(\forall)x>0\Leftrightarrow x^2+x(2-m)+1>0,(\forall)x>0\quad(1)$ **1p**

Relatia (1) revine la $i)\ \Delta<0\Leftrightarrow m\in(0,4)$ **1p**

sau $ii)\ \Delta\geq 0,\ x_1+x_2<0,\ x_1\cdot x_2>0\Leftrightarrow m\in(-\infty,0]$ **1p**

Finalizare Pentru $m\in(-\infty,4)$ funcția f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ **1p**

Problema 4. Într-un bazin, apa curge prin trei robinete identice. Dacă primul robinet se deschide timp de 2 ore, al doilea se deschide timp de 3 ore iar al treilea se deschide timp de 2 ore, în bazin se adună 400 dal de apă. Dacă primul robinet se deschide timp de o oră, al doilea se deschide timp de 2 ore, iar al treilea se deschide timp de 4 ore, în bazin se adună 300 dal de apă. Dacă primul robinet se deschide timp de 3 ore, al doilea robinet se deschide timp de o oră, iar al treilea robinet se deschide timp de 6 ore, în bazin se adună 500 dal de apă. Determinați debitul fiecărui robinet.

<u>**Barem:**</u>

Notează cu *a,b,c* debitele celor trei robinete

Scrie sistemul $\begin{cases}2a+3b+2c=400\\ a+2b+4c=300\\ 3a+b+6c=500\end{cases}$ **2p**

Notând cu A, matricea sistemului, obține $\det A=24$ **3p**

Obține soluțiile $a=100,\ b=50,\ c=25$ **2p**

Notă. *Orice altă rezolvare corectă se va puncta corespunzător.*