MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + 2X + 2$ având rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

b) Demonstrați că polinomul *f* are o singură rădăcină irațională.

c) Calculați $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)$.

Barem:

a) Scrie relațiile Viete……………………………………………………………………………………**1p**

Obține $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -4$ ……………………………………………………………...……………**1p**

b) Deoarece $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -4$, deduce că polinomul are o rădăcină reală…………………………...……….**1p**

Observă că $f \in \mathbb{Z}[X]$ și analizează existența rădăcinilor raționale………………………………...…….**1p**

Concluzia : polinomul are o rădăcină reală care nu este rațională, deci are o singură rădăcină irațională.........**1p**

c) Deoarece x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini , rezultă $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right) = \dfrac{(-2-x_1)(-2-x_2)(-2-x_3)}{x_1x_2x_3}$

Finalizare $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right) = \dfrac{f(-2)}{-2} = 5$ ……………………………………………………..…...**2p**

OBS: Folosind relațiile Viete, obține $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right) = 5$ ………………..................................….**2p**

Problema 2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ și corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$

a) Determinați probabilitatea ca alegând un element din inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, acesta să fie neinversabil.

b) Rezolvați în corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ ecuația $\hat{3} \cdot x^4 + \hat{2} = \hat{0}$.

c) Justificați dacă există un morfism de grupuri $f : (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ astfel încât $f\left(\hat{3}\right) = \bar{2}$.

Barem:

a) Obține $U(\mathbb{Z}_6) = \left\{\hat{1}, \hat{5}\right\}$, deci probabilitate cerută este $\dfrac{2}{3}$ ……………………………………………………...**2p**

b) Obține $\hat{3} \cdot x^4 + \hat{2} = \hat{0} \Leftrightarrow x^4 = \hat{4} \Rightarrow x \in \left\{\hat{3}, \hat{4}\right\}$……………………………………………………………**2p**

c) Presupunem, prin reducere la absurd, că există un morfism cu $f\left(\hat{3}\right)=\bar{2}$.

În mod necesar $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ și $f\left(\hat{0}\right)=\bar{1}$ ……………………………………………………………**2p**

Atunci $f\left(\hat{3}+\hat{3}\right)=\bar{2}\cdot\bar{2}\Leftrightarrow f\left(\hat{0}\right)=\bar{4}$,contradicție. Presupunerea este falsă, deci nu există un astfel de morfism.....**1p**

Problema 3.

a) Demonstrați că $\int_0^1\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

b) Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă având derivata descrescătoare pe $[0,1]$, atunci $\int_0^1 f(x)dx\le f(1)-\frac{1}{2}\cdot f'(1)$.

Barem:

a) Folosind metoda integrării prin părții , obține cerința…………………………………………………………**3p**

b) Scrie $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x'\cdot f(x)dx=f(1)-\int_0^1 xf'(x)dx$ ……………………………………………...…………**2p**

Deoarece $f'(x)$ este descrescatoare si $x\le 1\Rightarrow f'(x)\ge f'(1)$ și $\int_0^1 x\cdot f'(x)dx\ge\frac{1}{2}\cdot f'(1)$ ……………..…….**1p**

Finalizare $\int_0^1 f(x)dx\le f(1)-\frac{1}{2}\cdot f'(1)$ ……………………………...……………………………...……**1p**

Problema 4. Costul total de cumpărare și întreținere a unui aparat medical pentru ***x*** ani este exprimat de relația $C(x)=4000\left(30+2\int_0^x\sqrt[3]{t}\,dt\right)$ (euro).

a) Determinați prețul de cumpărare.

b) Determinați costul exclusiv de întreținere pentru 8 ani a aparatului .

Barem:

a) Pentru $x=0\Rightarrow C(0)=120000$ …………………………..………..**3p**

b) Obtine $C(x)=4000\left(30+2\int_0^x\sqrt[3]{t}\,dt\right)=4000\left(30+\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x}\right)$ …………………….............................…**2p**

$x=8\Rightarrow C(8)=216000$ ……………………………………………...**1p**

Costul exclusiv de intretinere este $C(8)-C(0)=96000$ ……………..**1p**

Notă. *Orice altă rezolvare corectă se va puncta corespunzător.*