MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ 18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

Să se determine valorile reale ale lui a ştiind că distanţa dintre punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+ax$ cu axa (Ox) este egală cu 1.

Barem:

$f(x)=3x^2+ax, x\in\mathbb{R}, x_1, x_2$ rădăcini ale ecuației $f(x)=0.$ Presupunem că $x_1>x_2$ **1p**

$\triangle = a^2>0, (\forall)a\neq 0$ **1p**

$\left.\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{\triangle}}{6} \\ x_1>x_2 \end{array}\right\}\Rightarrow x_1=\dfrac{-a+\sqrt{\triangle}}{6}, x_2=\dfrac{-a-\sqrt{\triangle}}{6}$ **2p**

Condiția din enunț $\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} |x_1-x_2|=1 \\ x_1>x_2 \end{array}\right\}\Rightarrow x_1-x_2=1$ **1p**

Din relațiile lui Viete, rezultă $x_1+x_2=-\dfrac{a}{3}$ **1p**

$\left.\begin{array}{l} 2x_1=\dfrac{-a}{3}\Leftrightarrow x_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{6} \\ x_1=\dfrac{-a}{6}+\dfrac{\sqrt{\triangle}}{6} \end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{6}=\dfrac{-a}{6}+\dfrac{\sqrt{\triangle}}{6}\Leftrightarrow 9=a^2\Leftrightarrow a=\pm 3$ **1p**

Problema 2.

a) Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1+b_2+b_3=13$ şi $b_3=9b_1$. Să se calculeze b_5.

b) Dacă numerele a,b,c sunt în progresie aritmetică să se demonstreze că are loc relaţia $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2+6(a-b)^2$.

Barem:

a) Fie $b_2=b_1\cdot q, b_3=b_1\cdot q^2$ şi obţinem $b_1+b_1q+b_1q^2=13$ şi $b_1q^2=9b_1$.

Avem $q^2=9$ şi $b_1(1+q+q^2)=13$. **2p**

Deci pentru $q=3$ avem $b_1=1$ şi pentru $q=-3$ avem $b_1=\dfrac{13}{7}$.

Obţinem $b_5=q^4=81$ sau $b_5=\dfrac{13}{7}\cdot 81=\dfrac{553}{7}$. **2p**

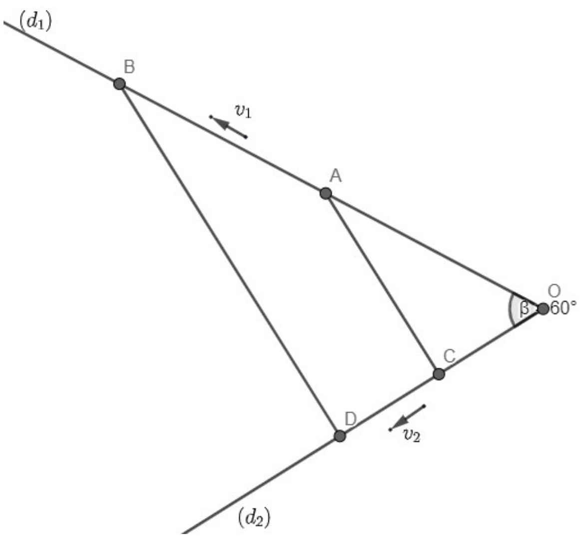
b) Dacă $a,\ b,\ c$ sunt în progresie aritmetică notăm $a=\alpha-r, b=\alpha, c=\alpha+r$ şi obţinem în relaţia dată:

$3\left[(\alpha-r)^2+\alpha^2+(\alpha+r)^2\right]=(3\alpha)^2+6(-r)^2 \Leftrightarrow 9\alpha^2+6r^2=9\alpha^2+6r^2$ ………………………..……**3p**

Problema 3.

Într-un oraş O se întâlnesc două şosele drepte notate d_1 şi d_2 şi care formează un unghi cu măsura egală cu 60^0. Pe şoseaua d_1 sunt situate şi oraşele A şi B astfel încât A se găseşte între O şi B, iar pe d_2 sunt situate staţiile de benzină C şi D astfel încât C este între O şi D; în plus se ştie că arhitecţii au proiectat amplasarea benzinăriilor astfel încât $AC\perp d_2$ şi $BD\perp d_2$. Două autoturisme pornesc simultan unul din A spre B cu viteza constantă de 80 km/h, celălalt din C spre D cu viteza constantă de 60 km/h. Stabiliţi, justificând răspunsul, care dintre cele două autoturisme ajunge primul la destinaţia dorită.

__Barem:__



Desen correct……………………………………………...**1p**

$\begin{cases} v_1=80\text{km/h} \\ v_2=60\text{km/h} \end{cases}$

$\triangle ODB, \triangle OCA: \begin{cases} OD=\frac{1}{2}\cdot OB \\ OC=\frac{1}{2}\cdot OA \end{cases}$ ...…………………………**1p**

Fie t_1, timpul necesar primului autoturism pentru a ajunge din A în B şi t_2, timpul necesar celui de-al doilea autoturism pentru a ajunge din C în D……..…………………………...**1p**

$AB=OB-OA=2(OD-OC)=2CD=2\cdot x$ ……...……**1p**

$\begin{cases} [AB]: 2x=80\cdot t_1 \\ [CD]: x=60\cdot t_2 \end{cases}$ ……………………………..…………**1p**

Obține $2=\frac{80}{60}\cdot\frac{t_1}{t_2}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=\frac{3}{2}>1\Rightarrow t_1>t_2$ **1p**

Așadar, ajunge mai repede autoturismul din C în D...**1p**

Problema 4.

Fie $\triangle ABC$ şi punctele P şi Q astfel încât $\overrightarrow{PC}=\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$.

a) Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{PQ}$ în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

b) Demonstrați că punctele P şi Q şi mijlocul segmentului [AB] sunt coliniare.

c) Ştiind că $PB=4\text{ cm}, AQ=3\text{ cm}, m(\angle ABC)=60^\circ$, calculaţi lungimea segmentului [AB] şi aria $\triangle ABC$.

__Barem:__

a) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ …………………...……………………….…**2p**

b) Fie M mijlocul lui $[AB]$:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PM}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\\ \overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{PB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$ **1p**

Obține $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{QM}=\frac{\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{QA}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{QB}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{QM}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$ …………..**1p**

Obține $\overrightarrow{QM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(+\overrightarrow{BA}+\frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PM}$

Așadar, $\overrightarrow{QM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PM}\Leftrightarrow P,Q,M$ coliniare……………...…………………………………….…..**1p**

c) Se construiește $CE\perp AB$.

Obține $CE=4\sqrt{3}$ cm , apoi $AE=4\sqrt{6}$, de unde $AB=4+4\sqrt{6}$ **1p**

$A_{\triangle ABC}=\left(4+4\sqrt{6}\right)\cdot 2\sqrt{3}$ **1p**

<u>Notă</u>. Orice altă rezolvare corectă se va puncta corespunzător.