CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.

Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{x+1}\left(\log_2 \dfrac{2x-1}{x+3}\right)$, unde D este domeniul de definiție a funcţiei *f*.

a) Să se determine mulțimea maximă de definiție a funcției *f*.
b) Demonstraţi că reprezentarea geometrică a graficului funcţiei *f* nu intersectează axa absciselor.
c) Stabiliţi semnul funcţiei *f*.

Barem:

a) $\left.\begin{matrix} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in (-1,\infty)\setminus\{0\}$ (1) ……………………………………………………………………**0.5p**

$\log_2 \dfrac{2x-1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+3} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1-x-3}{x+3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-4}{x+3} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$ (2) ……...…**1p**

Din (2) şi (1), obține $x \in (4,+\infty) \Rightarrow D = (4,+\infty)$ **0.5p**

b) $\log_{x+1}\left(\log_2 \dfrac{2x-1}{x+3}\right) = 0 \Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+3} = 2 \Leftrightarrow 2x-1 = 2x+6 \Leftrightarrow -1 = 6$(fals!) ……..….**1p**

Așadar, ecuaţia nu are soluţii pe D, adică $G_f \cap Ox = \varnothing$ ………………………………………………**1p**

c) Dacă $f(x) < 0$, atunci pentru $x > 4 \Rightarrow \log_2 \dfrac{2x+1}{x+3} < 1$, adică $\dfrac{2x+1}{x+3} < 2$ (adevărat).............................**1p**

Dacă $f(x) > 0$, atunci pentru $x > 4 \Rightarrow \log_2 \dfrac{2x+1}{x+3} > 1$, adică $\dfrac{2x+1}{x+3} > 2$ (fals)...................................**1p**

Așadar, $f(x) < 0, (\forall) x \in (4,+\infty)$ **1p**

Problema 2.

Se consideră dreapta $(a): 2x - y = 4$. Prin *A(-2,3)* se duce dreapta *(b)* paralelă cu dreapta *(a)*, pe care se consideră punctul *B* de abscisă 5.

a) Calculaţi distanţa de la *A* la *(a)*.
b) Calculaţi $d(A,B)$.
c) Demonstrați că pentru orice punct *C* de pe dreapta *(a)*, aria ΔABC este constantă.

Barem:

a) $d(A,(a)) = \dfrac{|2\cdot(-2)-3-4|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{11}{\sqrt{5}} = \dfrac{11\sqrt{5}}{5}$………………………………………………..……………**1p**

b) $\left.\begin{array}{l} a \parallel b \Rightarrow m_a = m_b \\ m_a = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_b = 2 \Rightarrow (b): y-3 = 2(x+2) \Rightarrow (b): 2x - y + 7 = 0$ **2p**

Cum $B(5,y) \in (b)$, obține $10 - y + 7 = 0$, adică $y = 17 \Rightarrow B(5,17)$ **1p**

Obține $d(A,B) = \sqrt{7^2 + 14^2} = 7\sqrt{5}$ **1p**

c) Fie $C(u,v) \in (a)$. Obține $2u - v = 4, v = 2u - 4 \Rightarrow C(u, 2u-4)$ ……………………………………**1p**

$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ [AB] - \text{fix} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB \cdot d(C,(b))}{2} = \dfrac{AB \cdot d(A,(a))}{2} = \text{constant}$ **1p**

Problema 3.

Diana a plasat într-un depozit, în regim de dobândă simplă, suma de 4000 lei, cu rata anuală a dobânzii de 2,5%, iar în alt depozit suma de 4500 lei, cu rata anuală a dobânzii de 2%. Pentru fiecare n natural x_n, y_n sunt sumele în lei disponibile în primul depozit, respectiv în al doilea după n ani (x_0=4000, y_0=4500).

a) Diana se gândeşte să renunţe la depozitul cu dobânda mai mică şi să transfere cei 4500 de lei în primul depozit. Calculaţi câţi lei pierde în trei ani dacă nu face această tranzacţie?

b) Demonstraţi că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt progresii aritmetice.

c) Determinaţi numărul de ani după care suma disponibilă în cele două depozite depăşeşte 11000 lei.

Barem:

a) Pentru suma de 4500 lei dobânda într-un an cu rata de 2,5% este $\dfrac{2,5}{100} \cdot 4500 = 2,5 \cdot 45 = 112,5\,\text{lei}$, iar dobânda cu rata de 2% este $\dfrac{2}{100} \cdot 4500 = 90\,\text{lei}$. Diferenţa 112,5-90=22,5 lei, reprezintă pierderea pe un an. În trei ani Diana pierde 3·22,5 lei=67,5 lei…………………………………………………………..**2p**

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}: x_0 = 4000$

$x_1 = 4000 + \dfrac{25}{100} \cdot 4000 \Rightarrow x_1 = 4000 + 100$

$x_2 = x_0 + 2 \cdot 100$

....

$x_n = x_0 + (n-1) \cdot 100$

Deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este progresie aritmetică cu primul termen x_0=4000 şi raţia 100………………………....**2p**

Analog $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este progresie aritmetică cu primul termen y_0=4500 şi raţia 90………………………..**1p**

c) După n ani în primul depozit Diana are $S_n = 4000 + (n-1) \cdot 100$, iar în al doilea depozit $S'_n = 4500 + (n-1) \cdot 90$.

Deci $S_n + S'_n > 11000 \Leftrightarrow 4000 + (n-1) \cdot 100 + 4500 + (n-1) \cdot 90 > 11000$

$(n-1) \cdot 190 > 2500 \Leftrightarrow n - 1 > \dfrac{2500}{190} \Rightarrow n \geq 15$

După 15 ani suma din cele două depozite depăşeşte 11000 lei……………………………………………**2p**

Problema 4.

Determinaţi termenul care îl conţine pe b^2 din dezvoltarea $\left(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}\right)^n$, ştiind că n este cel mai mare număr natural care verifică $\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0$.

Barem:

Din $\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0$, obținem $-\log_3 n + \dfrac{\log_3 n}{\log_3 n - 1} > 0$ **1p**

Cu substituția $\log_3 n = \alpha$, obținem $\dfrac{\alpha(\alpha-2)}{\alpha-1} > 0$, adică $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$. **3p**

Dacă $\alpha < 2$, atunci $\log_3 n < 2$, adică $n_{\max} = 8$. **1p**

$T_{k+1} = C_8^k a^{\frac{8-k}{2}} b^{\frac{k}{3}} \Rightarrow k = 6$ **1p**

Termenul care îl conține pe b^2 este $T_7 = C_8^6 ab^2 = 28ab^2$ **1p**