MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ 18 mai 2019

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII-a

Problema 1.

Fie matricea $X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Să se demonstreze că $X^2\cdot A=A\cdot X^2$, pentru orice A, matrice pătratică de ordinul doi cu elementele numere reale.

b) Să se calculeze suma $S=X+X^2+X^3+...+X^{2019}$.

Barem:

a) $X^2=-I_2$. **1p**

$X^2A=-I_2A=-A$ și $AX^2=-AI_2=-A$. **2p**

b) $X^3=-X$, $X^4=X^2\cdot X^2=-I_2\cdot(-I_2)=I_2$. **1p**

Avem că $X+X^2+X^3+X^4=O_2$. **1p**

$S=X+X^2+X^3+...+X^{2019}=504\cdot(X+X^2+X^3+X^4)+X+X^2+X^3=X-I_2-X=-I_2$ **2p**

Problema 2.

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(m,1)$, $B(3,m)$ și $C(1,2)$, unde m este un număr real.

a) Demonstrați că punctele A, B și C nu sunt coliniare pentru nicio valoare a numărului real m.

b) Determinați numărul real m pentru care aria triunghiului ABC este minimă.

Barem:

a) $\Delta=m^2-3m+4$. **1p**

$\Delta=\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$, oricare ar fi m număr real. Rezultă că $\Delta\neq 0$, oricare ar fi m număr real. Deci A, B, C nu pot fi coliniare. **2p**

b) $S=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{1}{2}|m^2-3m+4|=\frac{1}{2}\left[\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]\geq\frac{7}{8}$. **2p**

Aria minimă se obține pentru $m=\frac{3}{2}$. **2p**

Problema 3.

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-2x+3y$.

a) Demonstrați că legea "$\circ$" nu este asociativă.

b) Demonstrați că există a, b numere raționale care nu sunt întregi astfel încât $a\circ b$ este număr natural.

Barem:

a) De exemplu, $(0 \circ 1) \circ 2 \neq 0 \circ (1 \circ 2)$ **2p**

b) Fie n număr natural, $a \circ b = n \Rightarrow a = \dfrac{n-3b}{b-2}$. **2p**

Alegem n număr natural, b număr rațional care nu este întreg astfel încât a este număr rațional care nu este întreg. De exemplu, $n = 0,\ b = \dfrac{1}{3},\ a = \dfrac{3}{5}$. **3p**

Problema 4.

Spunem că o matrice A are proprietatea "p" dacă fiecare element este egal cu -1 sau cu 1 și produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană din matricea A este egal cu -1. Sorin vrea să dea exemple de matrice A cu proprietatea "p".

a) Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ -1 & -1 & b \\ c & d & e \end{pmatrix}$. Cum trebuie să aleagă Sorin numerele a, b, c, d, e astfel încât A să aibă proprietatea "p"?

b) Câte matrice de ordin 3 având proprietatea „p" poate scrie Sorin? Justificați răspunsul!

c) Poate Sorin să dea un exemplu de matrice cu proprietatea „p" cu trei linii și patru coloane? Justificați răspunsul!

Barem:

a) $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, $d = 1$, $e = 1$. **2p**

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ z & t & u \end{pmatrix}$, $a,b,c,d,x,y,z,t,u \in \{-1,1\}$.

a, b, c, d sunt arbitrare din mulțimea $\{-1, 1\}$.

Sorin trebuie să determine x, y, z, t, u. **1p**

x, y, z, t sunt: $x = -ab$, $y = -cd$, $z = -ac$, $t = -bd$, iar $u = -xy = -abcd$ și $u = -zt = -abcd$. **1p**

Cum a poate fi ales în două moduri și la fel b, c, d rezultă $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ matrice........ **1p**

c) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}$ o matrice cu proprietatea "p". Atunci $abcd = -1$, $xyzt = -1$, $\alpha\beta\gamma\delta = -1$,

$ax\alpha = -1,\ by\beta = -1,\ cz\gamma = -1,\ dt\delta = -1$. **1p**

Rezultă $abcdxyzt\alpha\beta\gamma\delta = -1$ și $abcdxyzt\alpha\beta\gamma\delta = 1$, fals........ **1p**

Notă. *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*